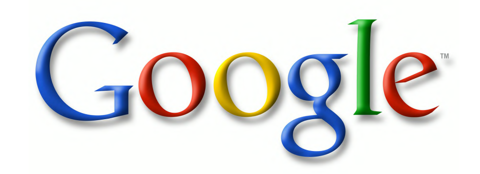
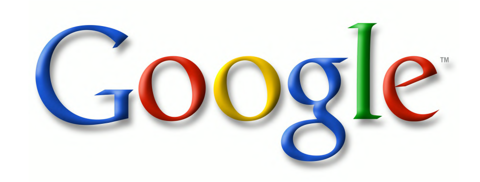






1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE





1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

Publié sous la direction

de M. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS

4e SÉRIE

TOME PREMIER

Année 1892.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1892

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CUBIQUES

Par Mme **Veuve F. Prime.**

Les démonstrations qu'on va lire sont établies au moyen des coordonnées barycentriques; et c'est grâce au principe de la *transformation homographique instantanée* que nous avons pu en énoncer les résultats, à la fois dans le système des coordonnées normales et dans celui des coordonnées barycentriques.

On sait que le principe de la transformation homographique instantanée est dû à M. de Longchamps qui l'exposa, pour la première fois, en 1886, au Congrès tenu à Nancy par l'Association française pour l'avancement des sciences. Il en donna l'énoncé suivant :

« *Imaginons un triangle de référence* ABC *et trois nombres* λ, μ, ν*; quelconques d'ailleurs. Il existe un point* M, *dans le plan* ABC, *dont les* coordonnées trilinéaires normales (x, y, z) *sont proportionnelles à* λ, μ, ν*; mais on peut aussi trouver un point* m *dont les* coordonnées barycentriques (α, β, γ) *sont, elles-mêmes, proportionnelles à ces nombres* λ, μ, ν. *Ces deux points* M, m, *ainsi associés, se correspondent homographiquement; et, si l'un d'eux* M *décrit une courbe* U *représentée, en coordonnées trilinéaires normales, par :*

$$f(x, y, z) = 0,$$

le correspondant m *décrit une courbe* u, *dont l'équation, en coordonnées barycentriques, est :*

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0. »$$

1. — Prenons le triangle ABC pour triangle de référence; et désignons, par α, β, γ, des coordonnées barycentriques.

D'après la terminologie proposée par M. de Longchamps, les points :

$$(1) \qquad P_1 \equiv A\alpha = B\beta = C\gamma,$$

$$(2) \qquad P_2 \equiv \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}$$

sont des points réciproques (*); ils sont *harmoniquement associés* aux droites :

$$(3) \qquad D_1 \equiv A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

$$(4) \qquad D_2 \equiv \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0,$$

lesquelles sont des transversales réciproques.

Dans la transformation par points réciproques, les droites D_1, D_2 donnent naissance à deux coniques. Nous les appellerons *coniques réciproques;* elles sont circonscrites au triangle de référence, et ont pour équations :

$$(5) \qquad C_1 \equiv \frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} = 0,$$

$$(6) \qquad C_2 \equiv \frac{1}{A\alpha} + \frac{1}{B\beta} + \frac{1}{C\gamma} = 0.$$

Les droites D_1, D_2 coupent chaque côté du triangle de référence en des points isotomiques. De plus, les droites qui joignent ces points aux sommets opposés du triangle de référence sont respectivement tangentes aux coniques C_1, C_2. Il résulte de là que P_1 est le pôle, et D_1 l'axe d'homologie de C_2, tandis que les éléments homologues de C_1 sont le point P_2 et la droite D_2.

Les transversales réciproques D_1, D_2 se rencontrent en un point p_1 dont les coordonnées sont proportionnelles aux quantités :

$$(7) \qquad \frac{B^2 - C^2}{BC}, \qquad \frac{C^2 - A^2}{CA}, \qquad \frac{A^2 - B^2}{AB};$$

et les coniques C_1, C_2 ont, pour quatrième point commun, le point p_2 dont les coordonnées sont inversement proportionnelles aux mêmes quantités.

(*) Voir *Premier inventaire de la Géométrie du triangle* par M. Vigarié *(Congrès de Toulouse)*.

Nous proposons d'appeler p_1 le *premier point transverse; p_2* le *second point transverse;* et nous dirons que les points P_1, P_2 constituent le *couple réciproque associé* aux points transverses.

2. — Lorsque le premier point transverse décrit la droite :

$$(8) \qquad \Delta \equiv l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

le second décrit, comme on le sait, une conique circonscrite au triangle de référence, ayant pour équation

$$(9) \qquad \Gamma \equiv \frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = 0.$$

Cherchons le lieu engendré, dans ces conditions, par le couple réciproque associé (P_1, P_2). A cet effet, observons que les quantités A, B, C doivent vérifier la condition :

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{1}{A} & \frac{1}{B} & \frac{1}{C} \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle résulte de l'élimination des paramètres α, β, γ entre les équations (3), (4), (8); ou bien des paramètres $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ entre les équations (5), (6), (9).

Les points P_1, P_2 engendrent donc un lieu unique dont l'équation

$$(11) \qquad Q \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

se trouve en remplaçant, dans l'équation (10), les quantités A, B, C par les autres quantités α, β, γ, auxquelles, en vertu des relations (1) et (2), elles sont inversement ou directement proportionnelles.

L'équation (11) représente une cubique anallagmatique, circonscrite au triangle de référence et passant par les quatre points algébriquement associés :

$G \equiv \alpha = \beta = \gamma$, $G_a \equiv -\alpha = \beta = \gamma$, $G_b \equiv \alpha = -\beta = \gamma$, $G_c \equiv \alpha = \beta = -\gamma$,

lesquels sont le centre de gravité du triangle de référence et les sommets du triangle anti-complémentaire. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Lorsque le premier point transverse décrit une ligne droite, le second décrit une conique circonscrite au triangle de référence, et le couple réciproque associé engendre une cubique anallagmatique, circonscrite au triangle de référence et au triangle complémentaire et passant par le centre de gravité du triangle de référence.

Lorsque le premier point transverse décrit une ligne droite, le second décrit une conique circonscrite au triangle de référence, et le couple inverse associé engendre une cubique anallagmatique, circonscrite au triangle de référence et au triangle antisupplémentaire, et passant par le centre du cercle inscrit au triangle de référence.

3. — Il résulte, de l'équation (11), que, outre les points A, B, C, G_a, G_b, G_c indépendants de la droite Δ, la cubique Q contient encore les deux points réciproques (ou inverses):

$$\varpi_1 \equiv l\alpha = m\beta = n\gamma, \qquad \varpi_2 \equiv \frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n},$$

dont le premier est harmoniquement associé à la droite Δ.

4. — Les deux cubiques

$$Q \equiv \sum l\alpha(\beta^2 - \gamma^2) = 0, \qquad Q \equiv \sum l'\alpha(\beta^2 - \gamma^2) = 0$$

associées aux droites :

$$\Delta \equiv l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \qquad \Delta' \equiv l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$$

se coupent en neuf points dont sept sont les points A, B, C, G, G_a, G_b, G_c donnés par le théorème du n° 2. Les deux autres points, et les trois sommets du triangle de référence vérifient les équations :

$$\frac{\alpha(\beta^2 - \gamma^2)}{mn' - nm'} = \frac{\beta(\gamma^2 - \alpha^2)}{nl' - ln'} = \frac{\gamma(\alpha^2 - \beta^2)}{lm' - ml'}.$$

Donc, outre les sept points que nous venons de rappeler, les cubiques Q, Q' ont encore deux points communs situés sur la droite

$$\delta \equiv \alpha(mn' - nm') + \beta(nl' - ln') + \gamma(lm' - ml') = 0.$$

Cette droite δ est harmoniquement associée au point

$$S \equiv \alpha(mn' - nm') = \beta(nl' - ln') = \gamma(lm' - ml'),$$

point de rencontre des coniques

$$\Gamma \equiv \frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = 0, \quad \Gamma' \equiv \frac{l'}{\alpha} + \frac{m'}{\beta} + \frac{n'}{\gamma} = 0;$$

et elle passe par les points

$$\varpi_2 = \frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n}, \quad \varpi_2' = \frac{\alpha}{l'} = \frac{\beta}{m'} = \frac{\gamma}{n'},$$

dont les réciproques sont harmoniquement associés aux droites Δ, Δ'.

5. — Si $ll' = mm' = nn'$, les droites Δ, Δ' sont des transversales réciproques; et les points ϖ_1', ϖ_2' coïncident avec les points ϖ_2, ϖ_1 qui sont donc, dans ce cas spécial, communs aux cubiques Q, Q'.

Nous réserverons les désignations Q, Q' à ce cas particulier, et nous dirons que les cubiques Q, Q' sont des cubiques réciproques, tout comme nous avons dit, au n° 1, que les points P_1, P_2 sont des points réciproques, les droites D_1, D_2, des transversales réciproques et les coniques C_1, C_2, des coniques réciproques.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Théorie des déterminants, par E. Carvallo, Examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique. (Deux brochures; tirage à part des *Nouvelles Annales*, mai-août 1891.)

Théorème fondamental pour la résolution numérique des équations, par le même (*Id.* octobre 1891.)

Parmi les brochures que nous avons reçues en ces temps derniers, les deux Notes dont nous venons de reproduire le titre nous ont plus particulièrement intéressé. C'est qu'elles touchent à deux points développés dans l'Algèbre du cours de mathématiques spéciales. Nous voulons en parler ici avec l'attention qu'elles méritent.

1° A propos de la première brochure, je dirai d'abord, bien franchement, que je ne partage pas l'opinion de l'Auteur sur la simplicité pédagogique qui, d'après lui, résulterait de l'exposition de la méthode Caspary-Grassmann. La simplification qu'il signale, si l'on y réfléchit bien, n'existe que pour des esprits mathématiques déjà formés, en pleine possession de l'Algèbre des déterminants. Pour ceux-là, je conviens qu'ils pourront sans peine suivre la route indiquée, et qu'ils concéderont toutes les conventions nécessaires pour exposer la méthode de Grassmann. Par exemple, ils ne feront pas difficulté d'admettre que x, y au lieu de représenter des nombres sont de purs symboles vérifiant, *par définition*, les égalités

$$xy = -yx, \qquad xx = 0.$$

Mais qu'on se représente un débutant, à l'esprit duquel on demande

d'accorder ces conventions arbitraires, dont l'utilité lui échappera absolument! Suivre une pareille voie, n'est-ce pas aller radicalement contre le but et l'esprit même de l'éducation mathématique? Que l'on prenne au contraire l'introduction à la théorie des Déterminants, telle qu'elle est presque universellement enseignée, aujourd'hui, dans l'Université française; y a-t-il, je le demande, dans cette exposition, un seul passage où l'on exige, de l'esprit que l'on veut ouvrir à la connaissance de cet instrument nouveau de l'Algèbre, autre chose qu'un effort d'attention presque banal? et l'on rattache si bien cette Algèbre nouvelle à l'ancienne que le raccord s'effectue sans que l'élève ait même la notion de la difficulté qu'il vient de franchir.

Il y a bientôt vingt ans que cette question des déterminants, déjà développée dans l'enseignement, est venue se placer officiellement dans les programmes d'admission à l'École Polytechnique.

Elle a été depuis lors tournée et retournée par ceux qui l'ont professée de cent façons diverses; et je puis dire, à ce propos, que j'ai reçu, ici même, pour être livrées à la publicité du Journal, plusieurs rédactions concernant cette première leçon sur les déterminants. Je les ai toujours écartées, et je ne crois pas, après mûre réflexion et en interrogeant l'expérience d'un long enseignement, qu'on puisse trouver quelque chose qui soit mieux approprié à l'esprit des débutants que l'introduction classique à laquelle j'ai fait tout à l'heure allusion et qui doit, je crois, être maintenue dans l'intérêt pédagogique.

2° Le théorème fondamental de M. Carvallo, pour la résolution numérique des équations, est un théorème important; mais il est nécessaire, pour en saisir la portée, et même le sens, d'entrer dans quelques détails préliminaires.

C'est au mois de février 1890 que M. Carvallo a présenté, à la Faculté des Sciences de Paris, deux thèses, dont l'une, la seule que je veuille viser ici, portait pour titre: EXTENSION DE LA MÉTHODE DE GRÄFFE, *Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes.* En quoi consiste cette méthode de Gräffe? C'est ce que nous devons dire avant d'aller plus loin (*).

(*) Cette méthode de Gräffe est peu connue en France. D'après une note que j'emprunte à l'Introduction historique de la thèse de M. Carvallo, l'astronome Encke a complété cette méthode dans un mémoire publié en 1841 dans l'Annuaire de l'Observatoire de Berlin. M. Carvallo rapporte, à ce propos, que M. D. Miguel Merino, le directeur de l'Observatoire de Madrid, a traduit, en 1879, le mémoire d'Encke. Mais le savant Secrétaire général de l'Académie des sciences de Madrid me permettra d'être surpris du reproche, que, à ce propos, il a cru devoir adresser aux Français, les blâmant d'avoir laissé une pareille œuvre dans l'oubli, et accusant, ni plus ni moins, « notre paresse d'esprit, la routine de nos écoles scientifiques, et notre patriotisme mal entendu ».

Le mémoire d'Encke a été, la chose n'a rien qui doive surprendre, oublié dans la revue technique où il avait été publié. Du reste, ce mémoire était médiocre et n'ajoutait rien d'essentiel à l'œuvre de Gräffe. La théorie restait à établir. C'est cette théorie que M Carvallo a exposée dans la thèse que nous analysons ici; elle constitue à notre avis la meilleure réponse qu'il fut possible de faire à une boutade échappée sans doute à la plume de M. Merino et qu'il a probablement regrettée, après réflexion.

Imaginons une équation du troisième degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

et soient α, β, γ les racines, supposées distinctes, $(\alpha > \beta > \gamma)$ de cette équation. Supposons que α étant un nombre renfermant *dix* chiffres à la partie entière, β ne renferme que *quatre* chiffres dans sa partie entière, γ pas du tout. Alors, *à l'ordre d'approximation qu'on recherche*, on peut dire :

1° Que β est *négligeable* devant α;
2° Que γ — β.

Considérons alors les relations classiques,

$$\alpha + \beta + \gamma = -A, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = B, \quad \alpha\beta\gamma = -C.$$

Dans ces égalités, les *valeurs principales* du premier membre, valeurs obtenues en supprimant les quantités négligeables, donnent avec l'approximation demandée,

$$\alpha = -A, \quad \alpha\beta = B, \quad \alpha\beta\gamma = -C.$$

Ces égalités déterminent, successivement, α, β, γ :

$$\alpha = -A, \quad \beta = -\frac{B}{A}, \quad \gamma = -\frac{C}{B}.$$

Mais, quand on a posé ce principe, une objection se présente aussitôt. En effet, une équation étant donnée, ses racines ne satisfont généralement pas aux conditions imposées, signalées ci-dessus.

C'est ici que se place, dans la méthode de Gräffe, une idée, assurément ingénieuse.

Considérons une équation $f(x) = 0$; soient α, β, γ ses racines.

Transformons-la, en posant

$$y = x^2.$$

Cette transformée aux carrés des racines aura pour racines α^2, β^2, γ^2.

Posons, ensuite,

$$z = y^2.$$

La transformée en z aura pour racines,

$$\alpha^4, \beta^4, \gamma^4,$$

etc.

Après p transformations, on aboutit à une équation dont les racines sont

$$\alpha^{2^p}, \beta^{2^p}, \gamma^{2^p}.$$

On voit alors, facilement, que si p est suffisamment grand, la méthode de Gräffe s'appliquera à l'équation transformée.

En effet, si, en supposant $\alpha > \beta$, on pose $\alpha = \beta h$; on a

$$\frac{\alpha^\lambda}{\beta^\lambda} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\lambda = h^\lambda > \theta,$$

θ dépassant toute limite, en même temps que λ. Ainsi, la nouvelle racine β^λ sera aussi petite que l'on voudra relativement à la racine α^λ.

Si l'on observe que $\lambda = 2^p$, on voit que λ grandit *très rapidement*, observation intéressante dans une question qui vise, principalement, au côté pratique. Ainsi les caractères qu'exige la méthode de Gräffe pour être applicable à une équation donnée, ne sont pas nécessairement vérifiés sur celle-ci; mais, après une série de transformations, dans lesquelles on cherche l'équation qui a pour racines les carrés des racines d'une équation donnée, on arrivera rapidement à une équation finale, à laquelle on pourra appliquer la méthode de Gräffe.

J'ai cherché à résumer aussi fidèlement que je l'ai pu, l'esprit général de cette méthode de Gräffe et ne pouvant m'étendre d'une façon plus circon-

stanciée sur ce sujet, je dois renvoyer le lecteur aux mémoires originaux (*), me bornant à donner l'énoncé du théorème fondamental de M. Carvallo, théorème qui permet de reconnaître a quels *caractères certains* on est arrivé au résultat que nous venons d'énoncer.

1. — *Pour que les racines* α_p *et* α_{p+1} *du polynôme*

$$f(x) = x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_px^{m-p} + \ldots + A_m,$$

soient séparées (**), *il faut et il suffit que* $\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}}$ *soit négligeable devant* $\left(\frac{A_p}{A_{p-l}}\right)^{\frac{1}{l}}$ *pour toutes les valeurs de* k *et de* l. *Le polynôme* f(x) *se sépare alors en deux fragments. Le premier, obtenu en supprimant les termes qui suivent* A , *donne les* p *premières racines. Le second fragment, obtenu en négligeant les termes qui précèdent* A_p, *donne les* m — p *dernières racines.*

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(Concours de 1891.)

Solution par M. G. MÉTÉNIER, professeur au Collège de Saint-Flour.

Étant donnés un triangle ABC *et deux points* P *et* Q *situés dans son plan, on considère les coniques* S *qui touchent le côté* CA *en* A *et passent par les points* P *et* Q ; *on considère de même les coniques* S′ *qui touchent le côté* CB *en* B *et passent par les points* P *et* Q.

1° *Soient* M *et* N *les points d'intersection d'une conique* S *avec les droites* CP *et* CQ; M′ *et* N′ *les points d'intersection d'une conique* S′ *avec les mêmes droites. Démontrer que la droite* MN *passe par un point fixe* A_1 *et la droite* M′N′ *par un point fixe* B_1, *quand les coniques* S *et* S′ *varient ;*

2° *En substituant le triangle* CA_1B_1 *au triangle* CAB, *dans la*

(*) Notamment aux articles cités et à la thèse originale, publiée chez Gauthier-Villars.

(**) Le terme *séparées*, ici employé, peut prêter à confusion, étant pris habituellement dans un sens différent. Peut-être vaudrait-il mieux dire qu'une racine *a* est *détachée* d'une racine *b*, si, ce qui constitue l'approximation d'ordre *k*, jugée suffisante, les premiers chiffres à gauche de *a* sont de l'ordre $10^h, 10^{h-1}, \ldots 10^{h-k}$; tandis que les premiers chiffres de *b* sont de l'ordre $10^{h-k-1}, 10^{h-k-2} \ldots$

définition des deux séries de coniques, on obtiendra deux nouveaux points A_2, B_2 *et ainsi de suite. Trouver l'équation de la droite* A_nB_n, *et chercher sa position limite, quand* n *devient infini ;*

3° On suppose que les coniques S *et* S' *varient de manière que les deuxièmes tangentes menées du point* C *à ces courbes soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites* CP *et* CQ ; *trouver, dans cette hypothèse, le lieu du point d'intersection des polaires d'un point donné* H, *par rapport à ces coniques ;*

4° Lorsque les coniques S *et* S' *varient en restant tangentes, trouver le lieu de leur point de contact.*

1. — Quand les trois points C, P, Q sont en ligne droite, la droite MN, ainsi que la droite M'N', se confondent avec la droite PQ. Il en est de même des droites CP et CQ qui se confondent avec PQ, en sorte qu'il n'y a pas lieu, dans ce cas, de se poser les trois premières parties du problème. Nous pourrons donc supposer que les trois points C, P, Q en sont pas en ligne droite, en nous réservant d'examiner ce cas particulier.

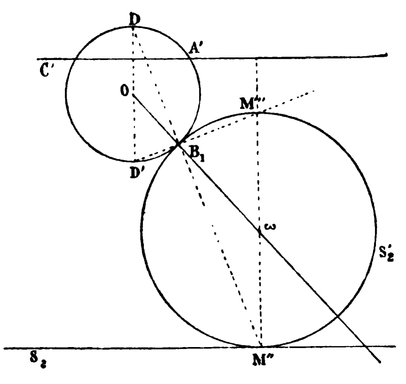


Fig. 1.

Prenons le triangle CPQ pour triangle de référence. Supposons que les côtés CQ, CP et PQ aient respectivement pour équations

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad \text{et} \qquad z = 0.$$

L'équation d'une conique quelconque passant par les points P et Q sera

$$az^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0.$$

Soit $y = mx$ l'équation de la droite CA. En exprimant que la conique est tangente à cette droite, on trouve la condition

$$(bm + b')^2 = 2ab''m.$$

Les coordonnées du point de contact doivent satisfaire à

l'équation

$$az + (bm + b')x = 0.$$

En appelant $-p$ la valeur de $\frac{z}{x}$ qui correspond au point A on a

$$bm + b' = ap.$$

L'équation de la conique devient

$$maz^2 + 2(ap - b')yz + 2b'mxz + ap^2xy = 0.$$

Désignons par μ un paramètre arbitraire, posons $\frac{b'}{a} = \mu$, et nous aurons définitivement, pour l'équation d'une conique S:

$$mz^2 + 2(p - \mu)yz + 2\mu mxz + p^2xy = 0 = S.$$

Si l'équation de la droite CB est $y = m'x$, que $-p'$ soit la valeur de $\frac{z}{x}$ qui correspond au point B, on aura de même, pour l'équation d'une conique S':

$$m'z^2 + 2(p' - \mu')yz + 2\mu'm'xz + p'^2xy = 0 = S'$$

en appelant μ' un nouveau paramètre arbitraire.

Considérons la conique S. Elle rencontre CP et CQ en des points M, N qui ont respectivement pour équations:

$$y = 0, \quad mz + 2\mu mx = 0, \quad \text{et} \quad x = 0, \quad mz + 2(p - \mu)y = 0.$$

La droite MN, passant par ces deux points, a pour équation

$$mz + 2py + 2\mu(mx - y) = 0.$$

Elle passe donc par le point fixe A_1 *dont les coordonnées satisfont aux équations*

$$mz + 2py = 0, \quad mx - y = 0.$$

La dernière exprime que ce point est situé sur la droite CA et elle réduit la première à :

$$z + 2px = 0.$$

Ainsi, *on passe du point* A *au point* A_1 *en changeant simplement* p en $2p$. On prouverait, de même, que la droite M'N' passe par un point fixe B_1 dont les coordonnées satisfont aux équations

$$y = m'x, \quad z + 2p'x = 0.$$

2. — Il résulte, de la remarque qu'on vient de faire, que le point A_n sera défini par les équations

$$y = mx, \quad z + 2^n px = 0;$$

et le point B_n, par les équations

$$y = m'x, \qquad z + 2^n p'x = 0.$$

Une droite passant par ces deux points aura pour équation

$$z + 2^n px + 2^n \frac{p' - p}{m' - m}(y - mx) = 0.$$

Divisons par 2^n, puis faisons n infini; et nous avons, pour équation de la droite limite :

$$(p' - p)y + (pm' - p'm)x = 0.$$

3. — Une droite passant par le point C a pour équation $y = \alpha x$. Si elle est tangente à la conique S,

$$[(p - \mu)\alpha + m\mu]^2 - p^2 m\alpha = 0.$$

On supprime la racine $\alpha = m$ de cette équation, et l'on trouve ensuite :

$$\alpha = \frac{m\mu^2}{(p - \mu)^2}.$$

Soit, de même, $y = \beta x$ l'équation d'une tangente menée de C à S', et autre que CB :

$$\beta = \frac{m'\mu'^2}{(p' - \mu')^2}.$$

Ces deux tangentes seront conjuguées harmoniques des droites CP et CQ si $\alpha + \beta = 0$, ou bien

$$m\mu^2(p' - \mu')^2 + m'\mu'^2(p - \mu)^2 = 0.$$

Cette équation se décompose dans les deux suivantes :

(1) $\qquad \mu(p' - \mu')\sqrt{m} + \mu'(p - \mu)\sqrt{-m'} = 0,$

(2) $\qquad \mu(p' - \mu')\sqrt{m} - \mu'(p - \mu)\sqrt{-m'} = 0.$

Soit x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point H. Posons, pour abréger l'écriture :

$$z_0 y + y_0 z = X, \quad x_0 z + z_0 x = Y, \quad x_0 y + y_0 x = Z.$$

Prenons les polaires du point H, par rapport à S et à S'; et nous trouverons facilement que les équations de ces polaires sont :

(3) $\qquad 2(mY - X)\mu + p^2 Z + 2pX + 2mz_0 z = 0,$

(4) $\qquad 2(m'Y - X)\mu' + p'^2 Z + 2p'X + 2m'z_0 z = 0.$

Chacune de ces équations représente un faisceau de droites passant par un point fixe. On a ainsi deux faisceaux F, F' ayant chacun pour sommet, le premier un point K, intersection des droites $mY - X = 0$, $\quad p^2 Z + 2pX + 2mz_0 z = 0$; $\quad$ le

second un point K′, intersection des droites $m'Y - X = 0$, $p'^2Z + 2p'X + 2m'z_0z = 0$. Les paramètres μ et μ' satisfaisant à l'une des relations homographiques (1) ou (2), on voit que les faisceaux F, F′ sont homographiques dans les deux cas. Dans chaque cas, le lieu cherché, qui résulte de l'intersection de deux rayons homologues des faisceaux F, F′ est donc une conique. Ainsi, le lieu se compose de deux coniques. On aura la première conique en éliminant μ et μ' entre (1), (3) et (4), et la seconde conique en éliminant de même μ et μ' entre (2), (3) et (4). Ces éliminations se font immédiatement. On voit que *les coniques ne seront réelles que si* m *et* m′ *sont de signes contraires*, c'est-à-dire si les droites CA et CB ne sont pas toutes deux dans l'angle PCQ, ou toutes deux extérieures à cet angle.

4. — On exprimera que les deux coniques S et S′ sont tangentes en écrivant que leur équation en λ a une racine double. Cette équation est :

$$(5)\quad (p^2-\lambda p'^2)\Big[(p^2-\lambda p'^2)(m-\lambda m')-4(m\mu-\lambda m'\mu')[p-\mu-\lambda(p'-\mu')]\Big]=0.$$

Elle se décompose en :

$$p^2 - \lambda p'^2 = 0 = R,$$

$$m'(p'-2\mu')^2\lambda^2-[mp'^2+m'p^2-4mp'\mu-4m'p\mu'+4(m+m')\mu\mu']\lambda + m(p-2\mu)^2=0=V.$$

L'équation en λ admettant une racine double, si λ est la racine double, les coordonnées x, y, z du point de contact des deux coniques S et S′ devront satisfaire aux équations :

$$(6)\quad \frac{x}{p-\mu-\lambda(p'-\mu')} = \frac{y}{m\mu-\lambda m'\mu'} = \frac{z}{p^2-\lambda p'^2}$$

qui expriment que x, y, z sont les coordonnées du centre du couple double de sécantes communes.

Si nous considérons la racine de $R = 0$, elle sera racine double de l'équation en λ, si elle satisfait aussi à l'équation $V = 0$. L'équation (5) montre que, dans ce cas, il faut qu'on ait $m\mu - \lambda m'\mu' = 0$, ou bien $p - \mu - \lambda(p' - \mu') = 0$. D'après les équations (6) on aura, dans la première hypothèse, $y = 0$, $z = 0$; et le lieu se réduit au point P. Dans la seconde hypothèse, on aura $x = 0$, $z = 0$; et le lieu se réduira au point Q.

Si nous écartons ces cas particuliers, la racine double de l'équation en λ sera racine double de l'équation V = o, et l'on aura :

$$[mp'^2+m'p^2-4mp'\mu-4m'p\mu'+4(m+m')\mu\mu']^2-4mm'(p-2\mu)^2(p'-2\mu')^2=0.$$

Cette équation se décompose en deux autres :

(7)
$$mp'^2+m'p^2-4mp'\mu-4m'p\mu'+4(m+m')\mu\mu'+2(p-2\mu)(p'-2\mu')\sqrt{mm'}=0$$

(8)
$$mp'^2+m'p^2-4mp'\mu-4m'p\mu'+4(m+m')\mu\mu'-2(p-2\mu)(p'-2\mu')\sqrt{mm'}=0.$$

L'équation V = o se réduit à :

(9)
$$2m'(p'-2\mu')^2\lambda-[mp'^2+m'p^2-4mp'\mu-4m'p\mu'+4(m+m')\mu\mu']=0$$

laquelle donne la valeur de la racine double λ.

Représentons par $\frac{1}{\rho}$ chacun des rapports (6), et considérons les équations simultanées (6), (7) et (9) :

$$p-\mu-\lambda(p'-\mu')=\rho x,$$
$$m\mu-\lambda m'\mu'=\rho y,$$
$$p^2-\lambda p'^2=-2\rho z.$$
$$\lambda(p'-2\mu')\sqrt{m'}+(p-2\mu)\sqrt{m}=0.$$

L'équation (7) ne figure pas dans ce groupe; mais, on en a tenu compte pour réduire l'équation (9). De ces quatre équations on pourra tirer ρ, λ, μ et μ' en fonction de x, y et z. On trouve :

(10) $$(\sqrt{m'}+\sqrt{m})\mu=\frac{p}{2}\cdot\frac{(2m'z+p'y)(\sqrt{m'}+\sqrt{m})+m'x(p'\sqrt{m}+p\sqrt{m'})+y(p'-p)\sqrt{m'}}{z(\sqrt{m'}+\sqrt{m})\sqrt{m'}+p'(x\sqrt{mm'}+y)}=\frac{p}{2}\cdot\frac{B}{B'},$$

(11) $$(\sqrt{m'}+\sqrt{m})\mu'=\frac{p'}{2}\cdot\frac{(2mz+py)(\sqrt{m'}+\sqrt{m})+mx(p'\sqrt{m}+p\sqrt{m'})+y(p-p')\sqrt{m}}{z(\sqrt{m'}+\sqrt{m})\sqrt{m}+p(x\sqrt{mm'}+y)}=\frac{p'}{2}\cdot\frac{A}{A'}.$$

Les équations B = o, B' = o représentent deux droites passant par le point donné B, car elles sont vérifiées par $z=-p'x$, $y=m'x$. De même, les équations A = o, A' = o sont vérifiées par $z=-px$, $y=mx$: elles représentent deux

droites passant par le point A. Les équations (10) et (11) sont donc les équations de deux faisceaux de droites ayant respectivement pour sommets les points B et A. Comme μ et μ' satisfont à la relation homographique (7), les deux faisceaux sont homographiques; et le lieu des points d'intersection de deux rayons homologues est une conique passant par les points A, B. On obtiendra immédiatement l'équation de cette conique en remplaçant μ et μ', dans (7), par les valeurs tirées des équations (10) et (11). On reconnaît sans peine que l'équation de cette conique est vérifiée quand on a simultanément $(z = 0, x = 0)$ ou bien $(z = 0, y = 0)$. Donc la conique passe par P et Q.

Si, aux équations (6) et (9), on associe l'équation (8), au lieu de (7), on obtient une seconde conique. Du reste on passe évidemment des formules du premier cas à celles du second, en changeant le signe de $\sqrt{m'}$ par exemple; en sorte que, pour avoir l'équation de la seconde conique, il suffira de changer le signe de $\sqrt{m'}$ dans l'équation de la première. Cette seconde conique passe de même par les quatre points A, B, P, Q. On voit, en outre, que les deux coniques sont réelles si m et m' sont de même signe, et imaginaires dans le cas contraire. Donc, si le lieu visé dans la troisième question est réel, le lieu cherché dans la quatrième question est imaginaire; et inversement.

Reste à examiner le cas où les trois points C, P, Q sont en ligne droite. On prendra pour triangle de référence le triangle ABC; on désignera par $y = mx$ l'équation de la droite PQ; par p et q les valeurs de $\dfrac{x}{z}$ qui déterminent, sur cette droite, les points P et Q; et en appelant μ et μ' deux paramètres arbitraires on aura sans peine les équations des coniques S et S':

$$S = m\mu x^2 + pqmz^2 - (p + q)mxz + (1 - \mu)xy = 0,$$
$$S' = \mu' y^2 + pqmz^2 - (p + q)yz + (1 - m\mu')xy = 0.$$

Les calculs sont ensuite les mêmes que précédemment, mais un peu plus simples. L'équation en λ admet une racine égale à l'unité, qui correspond aux points P et Q. L'équation $V = 0$ devient:

$$pq(1 - m\mu')^2\lambda^2 + [(p^2 + q^2)(1 - \mu - m\mu') + 2pqm\mu\mu']\lambda + pq(1 - \mu)^2 = 0.$$

On trouve facilement que le lieu se compose de la droite représentée par $z = 0$, c'est-à-dire de la droite AB, et d'une conique qui a pour équation

$$2pqmz^2 + 2xy - (p + q)(y + mx)z = 0.$$

5. — *Remarque sur la première question.* — On peut obtenir les points fixes A_1 et B_1 trés simplement. On a en effet *(fig. 1)*, un quadrilatère PQMN inscrit à la conique S. La droite OO′ est la polaire du point C par rapport au système des droites PQ et MN; c'est aussi la polaire de C par rapport à la conique S. Donc les droites CO, KO, AO et A_1O forment un faisceau harmonique, et le point A_1 est le conjugué harmonique de K par rapport à C et A; c'est donc un point fixe. De même pour B_1.

Remarque sur la quatrième question. — Projetons la figure, de façon que les points P, Q aient pour projections les points cycliques du plan de projection.

Les points A, B, C se projettent en A′, B′, C′; les coniques S deviennent des circonférences S_1 tangentes, au point A′, à C′A′; et les coniques S′ des circonférences S'_1, tangentes au point B′ à C′B′. Le cercle S'_1 est tangent au cercle S′ en un point M′, projection du point de contact M des coniques S et S′; la tangente commune T à S et S′ en M, se projette suivant la tangente commune T′ en M′, à S'_1 et S_1. Proposons-nous de trouver le lieu du point M′ et l'enveloppe de T′.

Transformons la figure par inversion, en prenant le point A′ pour pôle d'inversion. La transformée de S_1 sera, *(fig. 2)*, une droite S_2 parallèle à C′A′; la transformée de C′B′ sera une circonférence fixe O passant par A′, et la transformée de S'_1 une circonférence variable S'_2, tangente, en un point fixe B_1, à la circonférence O. Le point M′ aura pour transformé le point M″ où S_2 touche S'_2. La droite ωM″ est perpendiculaire à C′A′. Menons OD perpendiculaire à C′A′, elle sera parallèle à ωM″. Les triangles isoscèles DOB_1 et $M''\omega B_1$ sont équiangles; et les trois points D, B_1, M″ sont en ligne droite. Le lieu du point M″ est donc la droite fixe B_1D. Il est clair qu'on peut aussi considérer une seconde tangente parallèle à C′A′ et

touchant S'_2 en M‴, extrémité opposée à M′ du diamètre ωM′. Le lieu de ce point M‴ sera, de même, la droite fixe B_1D'. Ainsi le lieu du transformé de M′ se compose de deux droites rectangulaires passant par B_1. Donc le lieu du point M′ se composera de deux circonférences G, G′, passant par les points A′, B′, et s'y coupant à angle droit. Il en résulte que le lieu du point de contact M des coniques S et S′ se compose de deux coniques passant par les quatre points A, B, P, Q, telles que les tangentes au point A forment un faisceau harmonique avec les droites AP et AQ, et les tangentes au point B un faisceau harmonique avec les droites BP et BQ. La transformée de T′ est une circonférence variable T'_1, tangente, en M′, à S_2 et passant par le point A′. Comme l'angle $B_1M'S_2$ est constant la circonférence T'_1 coupera la droite fixe B_1D sous un angle constant. Si nous repassons à la figure primitive, nous en concluons, que la tangente commune T′ coupe la circonférence G, lieu du point M′, sous un angle constant. Donc l'enveloppe de T′ est une circonférence K concentrique à G. La transformée de T′ pouvant être aussi une circonférence passant en A′ et tangente en M′ à la parallèle menée, par ce point, à C′A′ on voit que l'enveloppe de T′ se composera de deux circonférences, l'une concentrique à G, l'autre concentrique à G′. L'enveloppe de la tangente commune T à S et S en leur point de contact M, se composera donc de deux coniques passant par les points P, Q, et telles que chacune, est tangente en ces points, à la conique correspondante, lieu du point M.

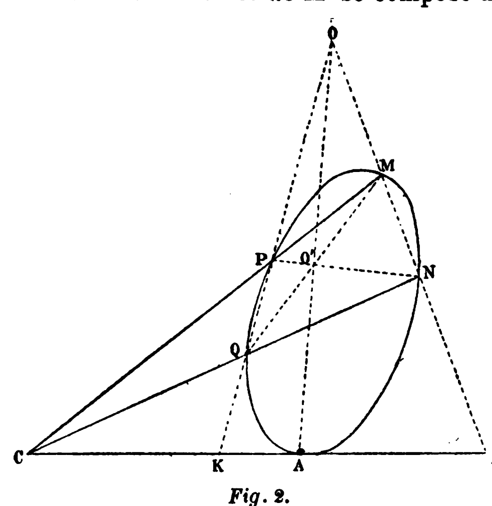


Fig. 2.

EXERCICE ÉCRIT

51. — On donne une parabole P. Une autre parabole Q, mobile, a pour axe une droite fixe Δ, perpendiculaire à l'axe de P, et touche P en un point variable M.

Abstraction faite de ce point M, P et Q se coupent en deux points situés sur une droite δ.

1° Trouver l'enveloppe de δ.

2° Le lieu des points où δ coupe la tangente, en M, à P.

Notes sur l'exercice 50.

J'ai proposé cet exercice pour trouver ainsi l'occasion de faire connaître un très élégant théorème dû à M. Cavallin (*) :

Une circonférence Δ *passant par le centre d'une hyperbole équilatère* H, *coupe cette courbe aux points* A, B, C, D. *Démontrer que la circonférence* Δ′, *circonscrite au triangle formé par les tangentes aux points* A, B, C, *passe par le centre de* H, *et que le centre de* Δ′ *est le point de* H *diamétralement opposé à* D.

On peut démontrer cette proposition de la manière suivante.

Prenons pour axes les asymptotes de H. L'équation de cette courbe est alors

$$xy = m^2\,;$$

et en posant

$$\frac{x}{m} = \frac{m}{y} = t,$$

on peut dire que le paramètre t détermine la position d'un point M, sur la courbe.

Soient t_1, t_2, t_3, t_4 les paramètres respectifs qui correspondent aux points A, B, C, D ; nous cherchons d'abord les deux relations que vérifient ces paramètres. Les droites AB, CD ayant pour équations :

$$y - kx - n = 0, \qquad y - k'x - n' = 0,$$

nous allons écrire que

$$(y - kx - n)(y - k'x - n') + \lambda(xy - m^2) = 0,$$

représente une circonférence passant par O.

On a donc

$$(1) \qquad nn' = \lambda m^2, \qquad kk' = 1, \qquad \lambda = k + k'.$$

D'ailleurs, les abscisses des points A, B sont les racines de

$$kx^2 + nx - m^2 - 0.$$

On a donc

$$(2) \qquad t_1 t_2 = -\frac{1}{k}, \qquad t_1 + t_2 = -\frac{n}{mk}.$$

(*) *Educational Times*, numéro d'octobre 1891.

On trouve, de même,

(3) $$t_3t_4 = -\frac{1}{k'}, \qquad t_3 + t_4 = -\frac{n'}{mk'}.$$

Des relations (1), (2), (3), on déduit :

(A) $$t_1t_2t_3t_4 = 1, \qquad (t_1 + t_2)(t_3 + t_4) + t_1t_2 + t_3t_4 = 0.$$

Cela posé, considérons les tangentes aux points A, B, qui se coupent en C'. Elles sont représentées, respectivement, par

$$\frac{x}{t_1} + t_1y = 2m, \qquad \frac{x}{t_2} + t_2y = 2m.$$

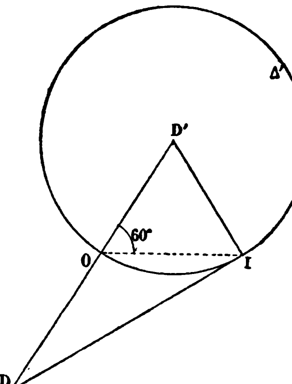
Par suite les coordonnées x_0, y_0 de C, sont :

(B) $$x_0 = 2m\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}, \qquad y_0 = \frac{2m}{t_1 + t_2}.$$

Le point D', diamétralement opposé à D, a pour coordonnées :

$$-mt_4, \qquad -\frac{m}{t_4}.$$

Si, de D', nous abaissons, sur OC', la perpendiculaire OK; les coordonnées de K vérifient les égalités



$$yt_1t_2 = x,$$
$$y + \frac{m}{t_4} = - t_1t_2)x + mt_4).$$

L'abscisse de K, x_1, est donnée par la formule

(C) $$x_1\left(t_1t_2+\frac{1}{t_1t_2}\right) = -m\left(\frac{1}{t_4} + t_1t_2t_4\right).$$

D'autre part, les égalités (A) donnent, par élimination de t_3,

ou $$(t_1+t_2)\left(t_4+\frac{1}{t_1t_2t_4}\right) = -\left(t_1t_2+\frac{1}{t_1t_2}\right),$$

(D) $$\left(\frac{1}{t_4}+t_1t_2t_4\right)(t_1+t_2) = -t_1t_2\left(t_1t_2+\frac{1}{t_1t_2}\right).$$

Des formules (B), (C), (D) on tire

$$x_0 = 2x_1.$$

Ainsi K est le milieu de OC'. Le théorème de M. Cavallin est la conséquence manifeste de cette remarque.

Si nous revenons maintenant au lieu géométrique proposé; ayant mené DI tangente à Δ', on voit : 1° que OI = OD', 2° que D'OI est un angle constant égal à 60°. Le lieu cherché est donc constitué par l'ensemble de deux hyperboles équilatères, égales à la proposée et qui s'obtiennent en faisant tourner celle-ci, dans les deux sens, de 60°, autour de son centre.

QUESTIONS D'EXAMENS

I. — *Étudier la série*

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}} + \dots$$

Supposons d'abord $x = 1$. En posant

$$u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}},$$

on a

$$nu_n = \frac{n}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}},$$

et, par conséquent,

$$nu_n > \frac{n}{1+1+\dots+1};$$

ou

$$nu_n > 1.$$

La série est donc *divergente* pour $x = 1$; et, *a fortiori*, pour $x > 1$.

Supposons maintenant $x < 1$. On a

$$n^2u_n = \frac{n^2x^n}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}},$$

d'où

$$n^2u_n < \frac{n^2x^n}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}},$$

ou

$$n^2u_n < n^2x^n.$$

Or pour $n = \infty$, x étant plus petit que 1,

$$\text{Lim } n^2x^n = 0.$$

Donc

$$\text{Lim } n^2u_n = 0.$$

La série est *convergente.*

II. — *Étant donnée une parabole* P*; en un point* M, *mobile sur* P, *on mène la normale. Elle coupe, en* N, *l'axe de* P, *et l'on prend* MI = MN.

1° *Quel est* a priori *le degré du lieu décrit par le point* I?

2° *Montrer géométriquement que ce lieu est une parabole* P'*;*

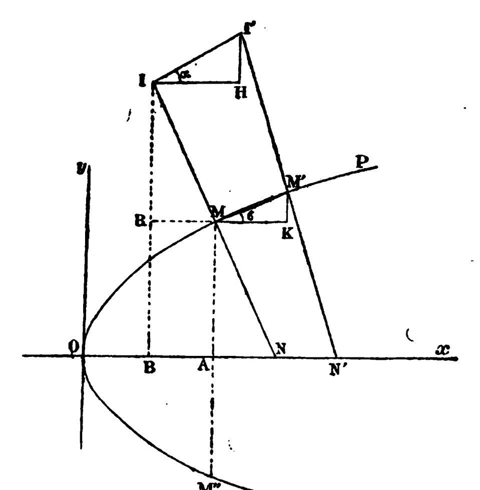
3° *On fait subir à* P *une translation égale à* p, *vers la gauche,*

parallèlement à l'axe. Quelle est la propriété de la parabole ainsi transportée, relativement à P'?

En déduire l'équation de P' (*).

1° Le point symétrique de I, relativement à Ox, appartient au lieu. Celui-ci est donc au moins du second degré.

En considérant un autre point du lieu, tel que I', il est facile de voir que II' n'est jamais perpendiculaire à Ox.



En effet on a

$$NA = AB = MR = p.$$

Ayant mené, par les points I, I'; M, M', des parallèles aux axes, on a IH = MK, I'H' = 2M'K; et, par suite,

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \varphi.$$

L'angle β n'étant jamais égal à $\frac{\pi}{2}$, sauf le cas où M' est confondu avec M'', on voit, finalement que sur IB il y a deux points de la courbe cherchée; et deux points seulement.

En observant que l'un des sommets de la conique est à l'infini sur ox on voit, en même temps, que le lieu est une parabole.

2° et 3°. — Comme MR = p, les coordonnées X, Y de I se déduisent des coordonnées x, y de M, par les formules

$$x = X + p, \qquad 2y = Y.$$

L'équation du lieu P', décrit par I est donc

$$Y^2 = 8p(X + p).$$

La normale au point I, à P', n'est donc pas IN, mais la droite qui va du point I au point symétrique de B, relativement à N.

QUESTION 283

Solution par un Abonné.

Résoudre complètement l'équation

$$(x^3 - 3qx + p^3 - 3pq)^2 - 4(px + q)^3 = 0.$$

(E. Catalan.)

(*) Cet énoncé est emprunté au recueil publié par la librairie Croville-Morant (*Examens d'admission*, 1891; p. 49). On demandait aussi de démontrer que NI est normale à P'; mais cette proposition est inexacte.

Cette équation peut s'écrire

$$(x + p)^2((x + p)^2 - 3(px + q))^2 - 4(px + q)^3 = 0.$$

Si l'on pose

$$(1) \qquad (x + p)^2 = z(px + q)$$

elle devient, en divisant par $(px + q)^3$

$$z(z - 3)^2 - 4 = 0, \qquad \text{ou} \qquad (z - 1)^2(z - 4) = 0.$$

Transportant dans (1) la racine double $z = 1$, puis la racine simple $z = 4$, on obtient immédiatement

$$x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{3p^2}{4}},$$

racines doubles;

$$x_3, x_4 = p \pm 2\sqrt{q},$$

racines simples.

On a donc les six racines demandées.

NOTA. — Solution analogue par MM. Bohn, maître-répétiteur au collège de Compiègne; Victor de Strékaloff, à Saint-Pétersbourg; Ignacio Beyens capitaine du génie à Cadix.

QUESTION 301

Solution par M. B. SOLLERTINSKY

Les coniques tangentes à une même hyperbole, et telles que pour chacune d'elles, les asymptotes de cette hyperbole forment un système de diamètres conjugués, sont des ellipses. Ces ellipses sont équivalentes. Elles interceptent, sur deux diamètres conjugués quelconques de l'hyperbole, des longueurs proportionnelles. — Démonstrations géométriques. (A. Tissot.)

Soient : OA, OB les asymptotes de l'hyperbole donnée; AB, A'B' deux tangentes parallèles; M, M' leurs points de contact, points milieux de AB, A'B'.

Si la conique Γ qui est une ellipse pour des raisons évidentes, touche l'hyperbole en M, elle la touche aussi en M'. Les mileux N, N' des segments BA', AB' appartiennent aussi à Γ. Il suffit, pour le reconnaître de projeter la figure de façon que l'ellipse devienne une circonférence.

L'aire de Γ est égale au produit par π, de l'aire NOMB. Or cette aire NOMB est égale à celle de OAB qui, comme on sait, est constante.

2° Soient : OD, OD′ deux diamètres conjugués de l'hyperbole; C le point d'intersction de OD avec l'ellipse Γ; CC′ la corde de Γ parallèle à DD′. On sait que le segment DD′ est parallèle à l'une des asymptotes et divisé en deux parties égales par l'autre. Mais cette dernière asymptote doit aussi passer par le milieu de CC′. Donc δ est sur OD′ et on a

$$OC : OD = OC' : OD'.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

334. — Construire un cercle tangent à une droite donnée et bi-tangent à une conique donnée.

(*A. Tissot.*)

335. — On considère une ellipse (E) et une droite (D) perpendiculaire à l'une des diagonales du rectangle des axes. D'un point M de la droite D, on abaisse des normales à l'ellipse Montrer que le quadrilatère des pieds des normales est un trapèze dont les bases sont parallèles à une diagonale du rectangle des axes.

Lorsque le point M se déplace sur la droite D, les côtés non parallèles et les diagonales du trapèze enveloppent une hyperbole équilatère, et le lieu des pôles de ces droites par rapport à l'ellipse est aussi une hyperbole équilatère.

(*E. N. Barisien.*)

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 27454-12-91.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CUBIQUES

Par Mme Veuve F. Prime.

(*Suite*, voir p. 3.)

6. — Les tangentes aux cubiques Q, Q', aux sommets du triangle de référence, ont pour équations :

$$l\alpha = m\beta = n\gamma,$$

pour les tangentes à la cubique Q, et :

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n},$$

pour les tangentes à la cubique Q'.

Les premières concourent au point ϖ_1 et les autres au point ϖ_2. Il en résulte que :

Les tangentes à deux cubiques réciproques, à chaque sommet du triangle de référence, sont des droites isotomiques. (*)

Les tangentes à deux cubiques inverses, à chaque sommet du triangle de référence, sont des droites isogonales.

7. — En faisant successivement $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, dans l'équation :

$$Q \equiv \sum l\alpha(\beta^2 - \gamma^2) = 0,$$

on trouve que la cubique Q coupe les côtés du triangle de référence aux mêmes points A_2, B_2, C_2 que les droites :

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n}.$$

Ces droites sont précisément celles qui joignent les sommets du triangle de référence au point ϖ_2.

De même, la cubique Q' rencontre les côtés du triangle de référence aux mêmes points A_1, B_1, C_1 que les droites $A\varpi_1$, $B\varpi_1$, $C\varpi_1$; il résulte de là que :

(*) Deux droites, issues d'un même sommet du triangle ABC, sont *isotomiques* quand elles coupent le côté opposé en des points isotomiques. (Vigarié, loc. cit.)

Deux cubiques réciproques coupent chaque côté du triangle de référence en des points isotomiques.

Deux cubiques inverses coupent chaque côté du triangle de référence en des points isogonaux.

Ce résultat, rapproché de celui qui a été obtenu au n° 6, montre que les cubiques réciproques (inverses) présentent, à la fois, les caractères des transversales et des coniques réciproques (inverses); comme ces transversales, elles coupent chaque côté du triangle de référence en des points isotomiques (isogonaux) et, comme ces coniques, elles ont pour tangentes, à chaque sommet du triangle de référence, des droites isotomiques (isogonales).

8. — Il résulte, des égalités

$$B(A_2GAG_c) = A(A_2G\varpi'_1G_c) = -1,$$
$$C(A_2GAG_b) = A(A_2G\varpi'_1G_b) = -1,$$

que les coniques $GABG_cA_2$, $GACG_bA_2$ sont tangentes au point A à la cubique Q et y admettent, pour tangente commune, la droite $A\varpi'_1$.

On voit par là que si une conique est circonscrite au quadrilatère $BCGG_a$, les tangentes aux points B, C, et les droites qui joignent ces points aux points d'intersection de la conique avec les côtés AC, AB sont des droites isotomiques.

Observons que le lieu du pôle de BC, par rapport à la conique $BCGG_a$, est la droite G_bG_c; cette droite est aussi le lieu du point d'intersection des droites qui joignent les points B, C aux points où la conique coupe les côtés opposés du triangle de référence. En outre, la droite qui joint les points d'intersection de la conique avec les côtés AC, AB passe constamment par le milieu de BC.

Dans le cas des coordonnées normales, les droites isotomiques deviennent isogonales; G devient le centre I du cercle inscrit; G_a, le centre I_a du cercle ex-inscrit situé dans l'angle A; le point milieu de BC, le pied de la bissectrice intérieure issue du sommet A; et G_bG_c, la droite I_bI_c qui joint les centres des cercles ex-inscrits, situés dans les angles B et C.

Ces considérations, généralisées, permettent d'énoncer le théorème suivant:

Une droite issue du sommet A *du triangle* ABC *coupe en* Y *le côté opposé* BC *et on prend sur cette droite deux points conjugués harmoniques* X, X_a. *Alors, toute droite menée par* Y *rencontre les côtés* AC, AB *du triangle en deux points* B′, C′ *d'une conique circonscrite au quadrilatère* $BXCX_a$; *et, lorsque* B′C′ *tourne autour de* Y, *le lieu des points d'intersection des droites* XB′, X_aC' *et* XC′, X_aB' *est la droite conjuguée harmonique de* AY *dans l'angle* BAC.

9. — Les résultats qui précèdent établissent qu'aux points réciproques

$$\varpi_1 \equiv l\alpha = m\beta = n\gamma, \quad \varpi_2 \equiv \frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n}$$

sont associées :

1° Les transversales réciproques :

$$\Delta \equiv l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \quad \Delta' \equiv \frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{n} = 0;$$

2° Les coniques réciproques :

$$\Gamma \equiv \frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = 0, \quad \Gamma' \equiv \frac{1}{l\alpha} + \frac{1}{m\beta} + \frac{1}{n\gamma} = 0;$$

et 3° Les cubiques réciproques :

$$Q \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \quad Q' \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{l} & \frac{1}{m} & \frac{1}{n} \end{vmatrix} = 0.$$

La présente Note a pour objet l'étude des propriétés de ces cubiques.

10. — Si l'on observe que l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

de la cubique Q représente la condition que doivent vérifier les coordonnées $\alpha, \beta, \gamma; \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ de deux points réciproques pour que ces points soient en ligne droite avec le point de coordonnées l, m, n; on peut énoncer les théorèmes suivants :

Si la droite qui joint deux points réciproques passe constamment par un point fixe, ces points décrivent la cubique associée à la droite harmoniquement associée au point réciproque du point fixe.

Si la droite qui joint deux points inverses passe constamment par un point fixe, ces points décrivent la cubique associée à la droite harmoniquement associée au point inverse du point fixe.

11. — Or, la droite qui joint deux points réciproques a, pour transformée par points réciproques, une conique circonscrite au triangle de référence et passant par ces deux points; par conséquent *toute droite* d, *qui passe par* ϖ_2 *(ou* ϖ_1*), détermine, sur la cubique* Q *(ou* Q'*), deux points réciproques* P_1, P_2 *situés sur une conique circonscrite au triangle de référence, et passant par* ϖ_1 *(ou* ϖ_2*).*

Il résulte de là que :

On peut encore considérer la cubique Q *comme le lieu des points d'intersection d'une droite qui tourne autour d'un point fixe et de la conique circonscrite au triangle de référence dont la droite est la transformée par points réciproques.*

On peut encore considérer la cubique Q *comme le lieu des points d'intersection d'une droite qui tourne autour d'un point fixe et de la conique circonscrite au triangle de référence dont la droite est la transformée par points inverses.*

Ce mode de génération permet d'établir, simplement, un grand nombre de propriétés des cubiques Q, en donnant à la droite mobile des positions particulières convenablement choisies.

12. — Ainsi, en donnant à la droite mobile la position $\varpi_1\varpi_2$, on retrouve que la cubique passe par les points ϖ_1, ϖ_2. Toute droite qui passe par ϖ_2 rencontre donc la cubique Q en trois points dont l'un est le point ϖ_2 lui-même; lorsque la droite tournant autour de ϖ_2, se rapproche indéfiniment de la position $\varpi_1\varpi_2$, le second point d'intersection tend à se confondre avec le point ϖ_2. Il en résulte que *la droite* $\varpi_1\varpi_2$ *est tangente à la cubique* Q *au point* ϖ_2 *et à la cubique* Q' *au point* ϖ_1.

13. — Si l'on transforme ce résultat par points réciproques, les cubiques Q, Q′ étant anallagmatiques, se conservent : la droite $\varpi_1\varpi_2$ devient la conique $ABC\varpi_1\varpi_2$; ϖ_1 passe en ϖ_2, et ϖ_2 en ϖ_1. Par suite, *la conique* $ABC\varpi_1\varpi_2$ *est tangente à la cubique* Q *au point* ϖ_1 *et à la cubique* Q′ *au point* ϖ_2.

14. — En donnant à la droite mobile l'une des positions ϖ_2G, ϖ_2G_a, ϖ_2G_b, ϖ_2G_c, comme chacun des points G, G_a, G_b, G_c coïncide avec son réciproque, on voit que *les coniques* $ABC\varpi_1G$, $ABC\varpi_1G_a$, $ABC\varpi_1G_b$, $ABC\varpi_1G_c$ *sont tangentes à la cubique* Q *aux points* G, G_a, G_b, G_c; *les tangentes communes en ces points sont les droites* ϖ_2G, ϖ_2G_a, ϖ_2G_b, ϖ_2G_c.

De même : *les coniques* $ABC\varpi_2G$, $ABC\varpi_2G_a$, $ABC\varpi_2G_b$, $ABC\varpi_2G_c$ *sont tangentes à la cubique* Q′ *aux points* G, G_a, G_b, G_c *et les tangentes communes en ces points sont les droites* ϖ_1G, ϖ_1G_a, ϖ_1G_b, ϖ_1G_c.

Pour avoir les théorèmes correspondants, dans le cas des coordonnées normales, il suffira de remplacer G, G_a, G_b, G_c par I, I_a, I_b, I_c.

15. — Lorsque la droite mobile coïncide avec ϖ_2A, la conique transformée par points réciproques, se réduit aux deux droites $A\varpi_1$, BC. Il en résulte que *les droites* $A\varpi_1$, $B\varpi_1$, $C\varpi_1$ *sont tangentes à la cubique* Q; *aux points* A, B, C *et cette cubique rencontre les droites* $A\varpi_2$, $B\varpi_2$, $C\varpi_2$ *aux points d'intersection de ces droites avec les côtés* BC, CA, AB *du triangle de référence.*

De même : *les droites* $A\varpi_2$, $B\varpi_2$, $C\varpi_2$ *sont tangentes à la cubique* Q′ *aux points* A, B, C *et la cubique* Q′ *rencontre les droites* $A\varpi_1$, $B\varpi_1$, $C\varpi_1$ *aux points d'intersection des droites avec les côtés* BC, CA, AB *du triangle de référence.*

16. — Ce dernier résultat avait déjà été obtenu analytiquement (nos 6 et 7), mais il était intéressant de le déduire du mode de génération géométrique de la cubique Q; et nous allons encore montrer que ce mode de génération permet aussi d'établir, très simplement, le résultat du n° 4.

Les droites, qui engendrent les cubiques représentées par

$$Q_1 \equiv \sum l_1\alpha(\beta^2 - \gamma^2) = 0, \qquad Q_2 \equiv \sum l_2\alpha(\beta^2 - \gamma^2) = 0,$$

tournent autour des points :

$$P_1 \equiv \frac{\alpha}{l_1} = \frac{\beta}{m_1} = \frac{\gamma}{n_1}, \qquad P_2 \equiv \frac{\alpha}{l_2} = \frac{\beta}{m_2} = \frac{\gamma}{n_2};$$

Les cubiques Q_1, Q_2 se coupent donc sur la droite P_1P_2, aux points où cette droite est rencontrée par la conique dont elle est la transformée par points réciproques.

(A suivre.)

SUR LE BINÔME DE NEWTON

Par M. **Ch. Michel**, élève au Collège Chaptal.

1. — Nous utiliserons, pour l'établissement de la formule de Newton, un théorème que nous démontrons plus loin directement, mais qui peut aussi être considéré comme le cas particulier du théorème suivant :

Pour qu'une fonction homogène $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, *du degré* m, *soit de la forme*

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^m,$$

il faut et il suffit que les dérivées d'un ordre quelconque soient proportionnelles.

Considérons d'abord les dérivées premières.

1° *Les conditions sont nécessaires.* Si

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) \equiv (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^m,$$

on a $\quad f'_{x_1} \equiv m(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^{m-1}a_1, \qquad$ etc.

Ainsi, les dérivés premières sont proportionnelles.

2° *Les conditions sont suffisantes.* Si

$$\frac{f'_{x_1}}{\alpha_1} \equiv \frac{f'_{x_2}}{\alpha_2} \equiv \frac{f'_{x_3}}{\alpha_3} \equiv \ldots \equiv \frac{f'_{x_n}}{\alpha_n},$$

$$\frac{f'_{x_1}}{\alpha_1} \equiv \frac{x_1f'_{x_1} + x_2f'_{x_2} + \ldots + x_nf'_{x_n}}{\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n} \equiv \frac{mf(x_1, x_2 \ldots x_n)}{\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n};$$

et, par conséquent,

$$m\alpha_1 f \equiv (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n)f'_{x_1}.$$

Si nous prenons les dérivées, par rapport à x_1, des deux membres de cette identité, nous voyons facilement que l'on a

$$(m - 1)\alpha_1 f'_{x_1} \equiv (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) f''_{x_1};$$

et ainsi de suite. Nous arrivons ainsi à une dernière identité

$$(m - m + 1)\alpha_1 f^{m-1}_{x_1} \equiv (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) f^{m}_{x_1},$$

$f^m_{x_1}$ étant une constante, puisque f est du degré m en x_1.

Multiplions toutes ces identités membre à membre; il vient

$$m! \alpha_1^m f \equiv (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)^m f^m_{x_1};$$

ce qui établit la proposition pour les dérivées du premier ordre.

2. — Nous allons montrer maintenant, en généralisant la remarque précédente, que la fonction f aura la forme considérée, si les dérivées d'ordre $p (p < m)$ sont proportionnelles.

Les conditions citées sont évidemment vérifiées si

$$f \equiv (\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)^m.$$

Montrons les propositions réciproques.

La fonction $f^{(p-1)}_{x_1}$ ayant, par hypothèse, ses dérivées proportionnelles, on a

$$f^{(p-1)}_{x_1} \equiv K(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)^{(m+p+1)},$$

etc.

3. — Nous indiquerons une application de ce théorème.

D'après ce qui précède:

Pour qu'un polynôme rationnel et entier soit de la forme $A(x + a)^m$, *il faut et il suffit qu'en le rendant homogène en* x *et* z, *les dérivées premières, prises par rapport à chacune des variables, soient proportionnelles.*

La proposition directe est évidente, et la réciproque peut encore s'établir de la façon suivante:

Soit le polynôme $f(x)$, de degré m, rendu homogène en x et z. Si

$$f'_z(x, z) \equiv a f'_x(x, z),$$

on a $(x + az) f'_x(x, z) \equiv x f'_x(x, z) + z f'_z(x, z) \equiv m f(x, z)$, d'après l'identité d'Euler.

Faisons z égal à 1; le polynôme $f(x)$ est divisible par sa dérivée $f'(x)$; par suite, d'après la condition connue, il se présente sous la forme

$$A(x + a)^m.$$

Cette remarque étant faite, posons

$$(x + a)^m \equiv x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m.$$

Nous avons

$f'_z(x, z) = A_1x^{m-1} + 2A_2x^{m-2} + \dots + mA_m$, (pour $z = 1$),

et

$f'_x(x,z) = mx^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \dots + A_{m-1}$ (pour $z=1$).

Le lemme établi prouve que

$$\frac{A_1}{m} = \frac{2A_2}{(m-1)A_1} = \frac{3A_3}{(m-2)A_2} = \dots = \frac{pA_p}{(m-p+1)A_{p-1}} = \dots = \frac{mA_m}{A_{m-1}} = a.$$

Nous en déduisons

$$A_1 = ma,$$

$$A_2 = \frac{m-1}{2} a.A_1,$$

$$A_3 = \frac{m-2}{3} a.A_2,$$

$$\vdots$$

$$A_p = \frac{m-p+1}{p} a.A_{p-1}.$$

Par multiplication il vient

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1.2.3\dots p} a^p.$$

La formule du binôme se trouve ainsi établie.

UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

Par M. **Jean Mascart**, élève de l'École normale supérieure.

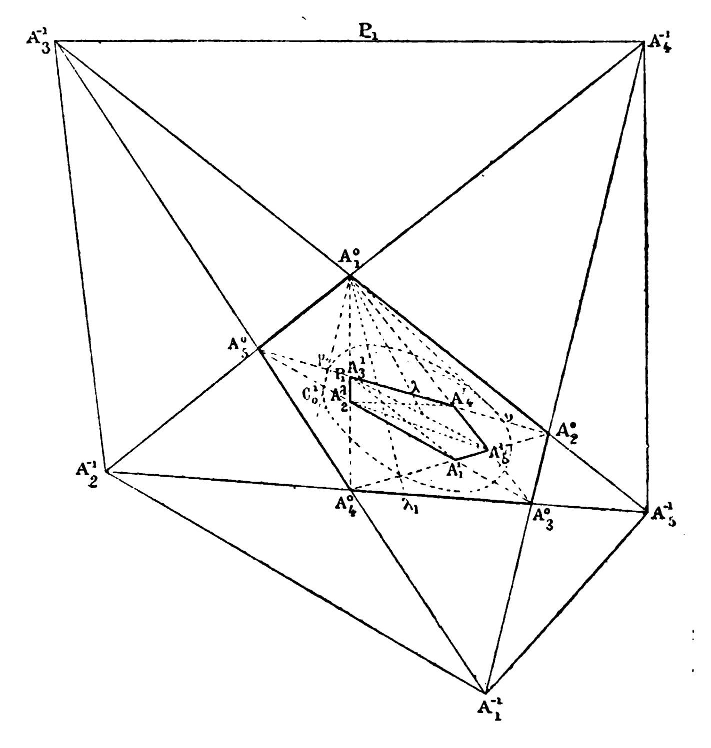
Étant donné une suite de pentagones P_{-n}, $P_{-(n-1)}$, ..., P_{-1}, P_0 P_1, ..., P_{n-1}, P_n, ... *récurrents, de telle sorte que les côtés de* P_n *soient les diagonales de* P_{n-1}*; on demande la limite de* P_n, n *croissant indéfiniment.*

Soit P_0 le pentagone convexe $A_1^0A_2^0A_3^0A_4^0A_5^0$, j'appellerai P'_0 le pentagone $A_1^0A_3^0A_5^0A_2^0A_4^0$.

1er Cas. — *Le pentagone donné* P_0, *est convexe.*

Soit C_0 la conique unique, bien déterminée, telle que la polaire de chaque sommet de P_0 soit le côté opposé. $A_3^0A_4^0$, par exemple, aura A_1^0 pour pôle.

Les polygones P_1 et P_{-1} étant polaires réciproques par rapport à la conique C_0, plus généralement, P_n et P_{-n} sont



polaires réciproques relativement à cette conique.

P'_n et P'_{-n} sont, de même, polaires réciproques par rapport à C'_0, conique associée à P'_0, comme C_0 l'est à P_0. Or, quel que soit P_0, P_n et P'_n, P_{-n} et P'_{-n} ont, deux à deux, la même limite.

P_0 étant convexe P_n et P'_n tendent vers un même point, pôle double de C_0 et de C'_0, et dont la polaire Γ est la limite commune de P_{-n} et P'_{-n}.

D'ailleurs, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ restent indéfiniment convexes et intérieurs les uns aux autres et, P_1 étant intérieur à C'_0, ce pôle double sera intérieur à C'_0; par suite, il est déterminé.

2me Cas. — P_0 *est quelconque.*

Nous n'insisterons pas sur ce cas. Les limites sont encore, respectivement, un point et une droite. La seule ambiguïté, dans ce cas, tient à ce qu'on ne sait pas *a priori* si le point est la limite de P_n, ou celle de P_{-n}.

On observera que la conique C_k est imaginaire (à coefficients réels) tant que P_k est convexe.

Chacune des coniques considérées, C'_0 par exemple, est déterminée par dix points et par les tangentes en ces points. En effet, les points d'intersection avec $A_5^0A_2^0$ sont, respectivement, conjugués par rapport aux segments $A_5^0A_3^1$ et $A_2^0A_4^1$; ce sont donc les deux points doubles de l'involution déterminée par ces deux segments. Cette remarque est applicable à tous les autres sommets.

Ceci démontre, en particulier, que toutes les droites analogues à $A_1\lambda$, λ étant le milieu de $\mu\nu$, concourent au même point, centre de C'_0. Si les points doubles $\mu_1\nu_1$ sur $A_3^0A_4^0$ sont imaginaires, il n'en est pas de même du milieu de leur distance λ_1; la droite $A_1^0\lambda_1$ et les quatre droites analogues concourent aussi au centre de C_0.

On pourrait aussi s'étonner de voir P_{-n} tendre vers une droite, lorsque P_0 est convexe. Mais cela tient précisément à ce fait que les polygones considérés ne tardent pas à cesser d'être convexes; C_0 devient alors réel.

D'ailleurs, pour que le polygone en question ne cessât pas d'être convexe, il faudrait que sa limite fût la droite de l'infini. Dans ces conditions, les coniques C_0 et C'_0 seraient concentriques, ce qui exige, pour tous les sommets, la coïncidence des droites $A_1\lambda$, $A_1\lambda_1$. Alors le pentagone est régulier; la solution du problème que nous avons traité est manifeste.

(A suivre.)

UN DEVOIR D'ÉLÈVE (*)

Discuter l'équation

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{x - d}}.$$

Pour opérer la discussion plus simplement, je prendrai une courbe auxiliaire, en posant $y^2 = y'$, d'où

$$y' = x \pm \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{x - d}}.$$

Si la seconde courbe est trouvée, il est clair qu'en prenant la racine $\pm\sqrt{y'}$, on aura la courbe cherchée, symétrique par rapport à l'axe des x. De plus, de la forme de la courbe auxiliaire dépendra celle de la courbe cherchée. Voyons donc les relations qui peuvent influer sur

$$y' = x \pm \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{x - d}}.$$

Cette courbe a un diamètre, qui est la bissectrice de l'angle des axes, et nous aurons à porter, au-dessous et au-dessus, la quantité

$$Y = \pm \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{x - d}}:$$

de Y dépendent donc les diverses formes.

En première ligne, nous mettrons le signe de a; car si a est positif, on pourra donner à x des valeurs infinies positives; on aura donc, à droite, deux branches infinies, tandis qu'il n'en serait pas de même si a était négatif, la courbe serait limitée à droite et s'étendrait à gauche, indéfiniment. Les valeurs réelles inégales, égales ou imaginaires qui annulent le radical, influent sur la forme cherchée et, aussi, la grandeur de ces racines comparée à celle de d.

(*) L'auteur de la remarquable discussion suivante est M. Bouquet de La Grye, qui, en 1848, était mon élève au lycée Charlemagne. Depuis cette époque, M. Bouquet est devenu membre de l'Institut, membre du Bureau des Longitudes : il a tenu ce qu'il promettait. E. C

Nous commencerons donc par supposer $a > 0$ et les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ réelles ou inégales. Ce cas particulier donne naissance à trois variétés, selon que

$$d < x' < x'', \qquad x' < d < x'', \qquad x' < x'' < d,$$

x', x'' étant les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Cherchons les valeurs de

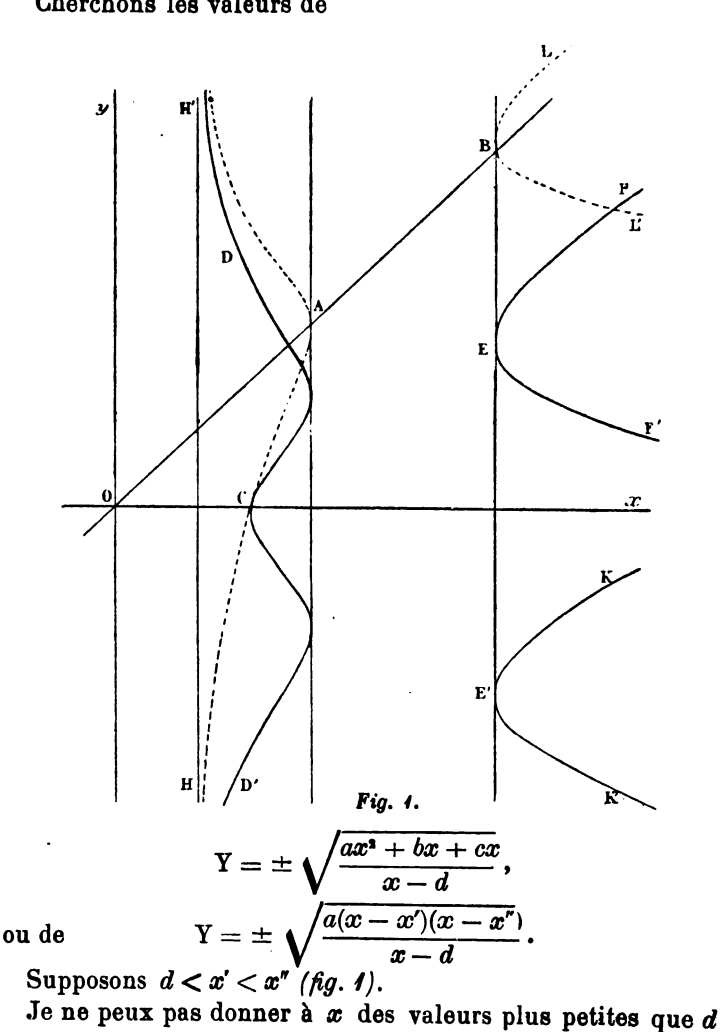


Fig. 1.

$$Y = \pm \sqrt{\frac{ax^2 + bx + cx}{x - d}},$$

ou de
$$Y = \pm \sqrt{\frac{a(x - x')(x - x'')}{x - d}}.$$

Supposons $d < x' < x''$ (*fig. 1*).

Je ne peux pas donner à x des valeurs plus petites que d

car les trois facteurs $(x - x')$, $(x - x'')$, $(x - d)$ seraient négatifs, Y serait imaginaire. Si l'on fait $x = d + h$, h étant très petit, on aura, pour Y, des valeurs très grandes, qui seront infinies pour $x = d$; ce qui donne une asymptote parallèle à l'axe des y à une distance d, soit HH' cette asymptote. A mesure que x s'éloignera de d et s'approchera de x', la valeur de Y diminuera, elle sera enfin nulle pour $x = x'$, ce qui donne deux arcs de courbe HA, H'A.

De x' à x'', on ne peut donner des valeurs à x, car les valeurs de Y seraient imaginaires ; mais on peut en donner au-dessus de x'. Pour $x = x'$, on a $Y = 0$, et à mesure que x croît, les valeurs de Y croissent, et s'éloignent indéfiniment, ce qui donne donc deux arcs de courbe BL, BL'. Maintenant il faut extraire la racine carrée des valeurs positives des ordonnées en laissant de côté les valeurs négatives qui donneraient des valeurs imaginaires, cela donnera naissance à trois branches, CDD', EFF', E'KK', forme de la courbe représentée par la première variété.

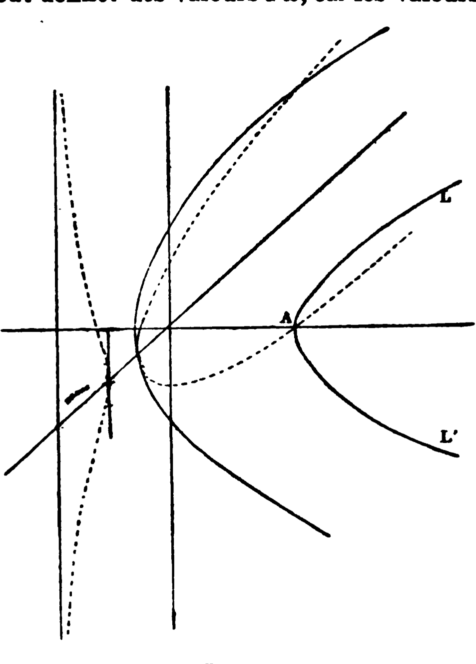


Fig. 2.

Cette forme se modifierait encore si la branche BL', de la courbe auxiliaire coupait, l'axe des x, car alors E'K et EF' aboutiraient à ce point, ou encore si BL' coupait l'axe des x en deux points, comme on le voit dans la *fig*. 2, alors on aurait une seconde courbe entourée par la première LAL'.

Le second cas arrivera évidemment si les racines sont négatives, mais le premier n'arrivera pas, c'est-à-dire que la branche BL′ (1) de la courbe auxiliaire ne pourra pas passer au-dessous des x et y rester constamment, car faisons $x = \infty$ dans

$$y = x - \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{x - d}}.$$

Après avoir multiplié et divisé par la somme, on aura

$$y = \frac{x^3 - (d + a)x^2 + \ldots}{x + \sqrt{}}$$

quantité infinie à la limite; donc les branches EF E′K ne

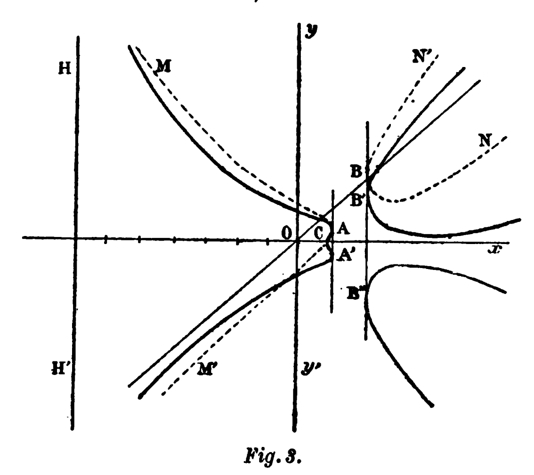


Fig. 3.

pourraient aboutir à un point de l'axe des x sans qu'il existât une quatrième branche enveloppée par les deux autres.

L'équation donnée $y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 7}}$ (*fig.3*) rentre dans cette variété. Examinons ce cas particulier, nous aurons

$$Y = \pm \sqrt{\frac{(x - 2)(x - 1)}{x + 7}}.$$

Nous ne pouvons donner à x des valeurs au-dessous de $- 7$; et en faisant croître x de $- 7$ à $+ 1$, on a les deux branches AM, AM′. De $x = 1$ à $x = 2$, on ne peut donner des valeurs à x, mais on en peut donner de $x = 2$ jusqu'à $+ \infty$,

les valeurs de y correspondantes seront infinies. Il faut s'assurer si la branche BN′ ne coupe pas l'axe des x, pour cela je fais $y = 0$. On a

$$x \pm \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 7}} = 0,$$

ou
$$x^3 + 13x^2 + 10x - 2 = 0.$$

Cette équation a une racine comprise entre 0 et 1, ce qui donne le point C (*fig. 3*). Nous pouvons extraire la racine de l'ordonnée de la courbe; le point A lui appartiendra, car $\sqrt{1} = 1$; au-dessous de l'unité les valeurs sont plus grandes dans la courbe que dans l'auxiliaire, mais au-dessus elles seront plus petites.

Il est clair que l'asymptote HH′ et la tangente, en C, à la courbe sont perpendiculaires à l'axe des x. On peut vérifier ces résultats. Nous avons

$$\operatorname{tg}\alpha = - \frac{y^4 - 4y^2x + 3x^2 + 14y^2 - 16x + 3}{y(4y^2x - 4x^2 - 28y^2 + 28x)}.$$

Pour $y = 0$: $\operatorname{tg}\alpha = \infty$, au point C la tangente est donc perpendiculaire à l'axe des x. De même pour $x = 1$, $y = 1$ $\operatorname{tg}\alpha = \infty$. De même pour $x = \sqrt{2}$ on a $y = \sqrt{2}$; la courbe a bien la forme indiquée.

Dans ce genre entrera aussi la courbe représentée par

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x}}$$

qui ne différera, de la précédente, qu'en ce que l'axe des y est asymptote au lieu de $x = -7$.

Pour mieux déterminer cette courbe auxiliaire, nous allons chercher les points où elle coupe l'axe des x, ce qui nous sera donné en posant $x^2(x - 2) = -x^2 + x$,

ou
$$x^3 - x^2 - x = 0.$$

On trouve d'abord l'origine ce qui était évident *a priori*, les autres valeurs seront données par l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, d'où $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$, ce qui donne les deux points A et B. Resterait seulement pour la mieux déterminer à chercher les tangentes parallèles à l'axe des x.

(A suivre.)

EXERCICE ÉCRIT

52. — Soit P une parabole dont le sommet est en O. D'un point A pris sur P, avec AO pour rayon, on décrit une circonférence Δ qui coupe P, abstraction faite de O, en trois points M, M, M″.

Trouver quelle doit être la position de A pour que ces points soient réels tous les trois.

Note sur l'exercice 51.

Soit $y = mx + \frac{p}{2m}$ l'équation de la tangente en M à la parabole P; la parallèle à Δ, menée par M, a pour équation

$$2m^2x - p = 0.$$

Ainsi

(1) $$(2m^2x - p)^2 + \lambda\left(y - mx - \frac{p}{2m}\right) = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(2m^2x - p - \mu)^2 + \lambda y + mx(4m\mu - \lambda) + \ldots = 0.$$

Déterminons μ par l'égalité $4m\mu = \lambda$

Alors, l'axe de (1) a pour équation

$$2m^2x = p + \frac{\lambda}{4m}.$$

En désignant par q la distance de l'origine à Δ, on a donc

(2) $$\lambda = 8m^3a - 4pm.$$

D'autre part, l'équation combinée avec celle de la parabole donne une équation représentant l'ensemble de la droite AB et de la tangente en M, à P. On trouve ainsi, pour représenter AB,

(3) $$4m^2\left(y + mx + \frac{p}{2m}\right) = \lambda.$$

Les égalités (2), (3), donnent

$$4y + mx + \frac{p}{2m} = 2ma - \frac{p}{m}$$

Telle est l'équation générale des droites AB.

D'après ce résultat, l'enveloppe de ces droites est la parabole qui correspond à l'équation

$$y^2 = 6p(x - 2a).$$

Le lieu des points de rencontre de AB avec la tangente en M, à P, est une cubique unicursale représentée par l'équation

(4) $$4y^2(a - x) = p(x + a)^2$$

Nota. — M. Barisien nous a adressé une solution analogue accompagnée de diverses remarques dont l'une portait sur la détermination de l'aire comprise entre la cubique (4) et son asymptote.

QUESTIONS D'EXAMENS

I. — *On considère l'égalité*

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Démontrer que

$$\text{(A)} \qquad y^{(n)} = \frac{V_n}{(1 + x^2)^{\frac{2n+1}{2}}},$$

V_n *désignant un polynôme entier, en* x, *du degré* n. *Calculer* V_n.

On a

$$(1) \qquad y' = \frac{-x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La loi indiquée est vraie pour $n = 1$.

Supposons que (A) soit vérifiée et différentions de nouveau; nous avons

$$y^{(n+1)} = \frac{V'_n(1 + x^2) - (2n + 1)xV_n}{(1 + x^2)^{\frac{2n+3}{2}}}.$$

Le numérateur de V_n est un polynôme entier de degré $n + 1$; ainsi, la loi est générale.

Pour trouver V_n, cherchons une formule de récurrence entre V_{n+1}, V_n, V_{n-1}.

La formule (1) donne

$$y'(1 + x^2) + xy = 0.$$

Appliquant la formule de Leibniz, on a

$$y^{(n+1)}(1 + x^2) + ny^{(n)}.2x + n(n - 1)y^{(n-1)} + xy^{(n)} + ny^{(n-1)} = 0.$$

ou $\qquad y^{(n+1)}(1 + x^2) + (2n + 1)xy^{(n)} + n^2y^{(n-1)} = 0.$

La formule (A), combinée avec cette égalité, conduit au résultat cherché :

$$V_{n+1} + (2n + 1)xV_n + n^2(1 + x^2)V_{n-1} = 0.$$

On peut alors appliquer le théorème de Sturm à l'équation

$$V_{n+1} = 0.$$

QUESTION 288

Solution, par M. H. Brocard.

Quelle est, parmi les normales à une ellipse donnée, celle qui est la plus éloignée du centre de la courbe. (Mannheim).

m désignant le coefficient angulaire de la normale, celle-ci a pour équation

$$y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}.$$

On a donc à chercher le maximum de

$$\delta = \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}\sqrt{1 + m^2}}.$$

On trouve, pour déterminer ce maximum, en prenant l'équation dérivée,

$$m^2 = \frac{a}{b}.$$

La valeur correspondante de δ, est :

$$\delta = \frac{c^2}{a + b}.$$

Ainsi, on décrira une circonférence ayant O pour centre et δ pour rayon, et on lui mènera une tangente, parallèlement à la direction $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

QUESTION 295

Solution par M. B. Sollertinsky.

Sur un diamètre D *d'une ellipse donnée on décrit une circonférence de cercle et l'on mène une tangente commune à ces deux courbes. Démontrer que la partie de cette tangente, comprise entre les points de contact, est égale à la projection sur* D, *du demi-diamètre qui lui est conjugué.* (Mannheim.)

Soient : d, d', θ les demi-longueurs et l'angle des diamètres conjugués D, D'; δ le demi-diamètre passant par le point de contact de la tangente commune, et δ' son conjugué.

L'aire du parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres conjugués étant constante, on a

$$d\delta' = dd' \sin\theta;$$

d'où

$$d'^2(1 - \cos^2\theta) = \delta'^2;$$

et, par suite,

$$d' \cos\theta = \sqrt{d'^2 - \delta'^2}.$$

Mais, le premier théorème d'Apollonius donne

$$d'^2 - \delta'^2 = \delta^2 - d^2.$$

Finalement,

$$d' \cos\theta = \sqrt{\delta^2 - d^2};$$

égalité qui prouve le théorème énoncé.

NOTA. — Solutions diverses par MM. Waroquier; Svechnicoff à Troïtzk; H. Brocard; Baudran, élève au lycée de Rouen. La solution de M. Waroquier se rapproche beaucoup de l'élégante démonstration de M. Sollertinsky.

QUESTION 303

Solution par M. BOHN, maître-répétiteur au Collège de Compiègne.

Soit $\dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{b^2}{y^2} - 1 = 0$, *l'équation d'une kreuzcurve.*

La droite qui joint les projections A, B *d'un point* N *de cette courbe, sur ses axes, touche l'ellipse qui correspond à l'équation* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ *en un point* M.

Démontrer que la parabole tangente aux axes, aux points où ils sont coupés par la tangente en N *à la kreuzcurve, passe, au point* M, *tangentiellement à l'ellipse.* (Balitrand.)

Soient α, β les coordonnées d'un point N de la kreuzcurve. On a alors

$$(1) \qquad \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - 1 = 0.$$

L'équation de la droite AB est

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0.$$

L'équation aux abscisses des points de rencontre de la droite AB et de l'ellipse est

$$(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)x^2 - 2a^2\alpha\beta^2 x + a^2\alpha^2(\beta^2 - b^2) = 0,$$

En tenant compte de (1), on voit que cette équation a une racine double, qui est $\frac{a^2\alpha\beta^2}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}$. Par suite la droite AB est tangente à l'ellipse en un point M dont les coordonnées sont:

$$x = \frac{a^2\alpha\beta^2}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \qquad y = \frac{b^2\alpha^2\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}.$$

L'équation de la tangente en N à la kreuzcurve est

$$(\alpha^2 - a^2)\beta y + (\beta^2 - b^2)\alpha x - \alpha^2\beta^2 = 0.$$

L'équation générale des coniques tangentes aux axes aux points où ils sont coupés par la tangente en N à la kreuzcurve est

$$2\lambda xy + [(\alpha^2 - a^2)\beta y + (\beta^2 - b^2)\alpha x - \alpha^2\beta^2]^2 = 0.$$

Exprimant que cette équation représente une parabole, on a

$$\alpha^2\beta^2(\alpha^2 - a^2)(\beta^2 - b^2)^2 - [\lambda + \alpha\beta(\alpha^2 - a^2)(\beta^2 - b^2)]^2 = 0,$$

d'où $$\lambda = - 2\alpha\beta(\alpha^2 - a^2)(\beta^2 - b^2).$$

L'équation de la parabole est donc

$$[(\alpha^2 - a^2)\beta y - (\beta^2 - b^2)\alpha x]^2 - 2\alpha^2\beta^2[(\alpha^2 - a^2)\beta y + (\beta^2 - b^2)\alpha x] + \alpha^4\beta^4 = 0.$$

Transportons maintenant les axes de coordonnées parallèment à eux-mêmes au point M, les formules de transformation sont

$$x = \frac{a^2\alpha\beta^2}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2} + X, \qquad y = \frac{b^2\alpha^2\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2} + Y.$$

Dans le nouveau système d'axes, les équations de la droite AB et de la parabole, sont

$$\beta X + \alpha Y = 0,$$

$$\text{(P)} \quad [(\alpha^2 - a^2)\beta Y - (\beta^2 - b^2)\alpha X]^2 - \frac{4a^2b^2\alpha\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}(\beta X + \alpha Y) = 0.$$

D'après ce résultat, la parabole (P) passe en M, et sa tangente en ce point est AB; par suite (P) est tangente à l'ellipse en M.

NOTA. — Nous avons reçu de M. Brocard, une élégante démonstration géométrique du théorème en question, et une autre solution analytique par M. Baudran, élève au Lycée de Rouen.

QUESTION 305

Solution par M. Jean Dewulf, élève au Lycée de Marseille.

On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy. *Par l'origine* O, *on fait passer une circonférence* Γ *de rayon invariable* R. *Soient* Δ, Δ′ *deux droites parallèles aux axes et tangentes à* Γ. *La droite qui joint le point* O *au point de concours des droites* Δ, Δ′ *coupe* Γ *en un certain point* I, *dont on demande le lieu géométrique.*

G. L.

Je désigne par α et β les coordonnées du centre C du cercle Γ. Elles sont liées par l'équation :

$$(1) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

Les coordonnées du point d'intersection D des droites Δ et Δ′ sont :

$$\begin{cases} \alpha + R \\ \beta + R. \end{cases}$$

Les coordonnées du point I satisfont à l'équation de la droite OD :

$$(2) \qquad y(\alpha + R) = x(\beta + R).$$

et à celle du cercle Γ :

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

J'élimine α et β entre ces trois équations, ce qui me donne pour équation du lieu,

$$[y(x^2+y^2)-2Rx(x-y)]^2+[x(x^2+y^2)+2Ry(x-y)]^2=4R^2(x^2+y^2)^2$$

ou, abstraction faite du facteur $x^2 + y^2$, qui représente l'origine,

$$(4) \qquad (x^2 + y^2)^2 = 8R^2xy$$

Cette équation représente une lemniscate dont les sommets sont placés sur la première bissectrice, à une distance 2R de l'origine.

En considérant toutes les tangentes parallèles aux axes, on trouve, pour le lieu complet, deux lemniscates.

Nota. — Solutions diverses par MM. Waroquier; Baudran, élève au Lycée de Rouen; Bohn, maître répétiteur au Collège de Compiègne; Svéchnicoff à Troïtzk.

QUESTION 287

Solution par M. BROCARD.

On donne, sur un même plan, une droite Δ *et un cercle* Γ *fixes : soit* Γ' *un second cercle, de rayon invariable, tangent à* Δ. *Trouver :*

1° L'enveloppe de l'axe radical δ *des circonférences* Γ *et* Γ' ;

2° Le lieu du point de rencontre M *de* δ *avec la ligne* AB *des centres des circonférences* Γ, Γ'. (Russo.)

1° Prenons, pour axes des coordonnées rectangulaires, une droite parallèle à Δ, passant par le centre B de Γ', et une perpendiculaire à Δ menée par le centre A de Γ.

Soient $OA = a$, $OB = b$, R, r les rayons des cercles Γ, Γ'.

L'axe radical δ et la droite AB ont, respectivement, pour équation

$$2by - 2ax = R^2 - r^2 + b^2 - a^2,$$
$$ay + bx = ab.$$

L'enveloppe de la droite δ a donc pour équation.

$$y^2 = 2ax + R^2 - r^2 - a^2.$$

La courbe correspondante est une parabole ayant pour foyer le milieu F de OA ; son sommet est le pied de l'axe radical du cercle Γ et du cercle Γ', lorsque ce dernier a son centre en O.

2° Le lieu (M) est la podaire de cette parabole par rapport au point A. Son équation est

$$y^2 = \frac{R^2 - r^2 - a^2 + 2ax}{a(a - 2x)} (a - x)^2.$$

Celle-ci représente une cubique circulaire, tangente à la parabole en son sommet, et admettant pour asymptote une parallèle à Oy, ou à Δ, menée par le foyer F.

Le point A est un point double isolé.

Il est à peine nécessaire de faire observer qu'il y a *deux* séries de circonférences Γ', à chacun desquelles on peut appliquer les résultats obtenus.

NOTA. — Nous avons reçu, pour cette question, une solution géométrique de M. Leinekugel qui généralise le théorème ; une solution analytique de M. Bohn, maître répétiteur au Collège de Verdun ; et une double solution (l'une analytique, l'autre géométrique) de M. Baudran, élève au Lycée de Rouen.

QUESTIONS PROPOSÉES

336. — On donne un point et deux cercles. Construire les foyers d'une conique passant par le point et bi-tangente à chacun des deux cercles, les centres de ceux-ci devant se trouver sur le même axe.

(*A. Tissot.*)

337. — Dans un déterminant de Vandermonde

$$|1 \; a, \; a^2 \ldots \; a^{n-1}|$$

on remplace les éléments de la dernière colonne par

$$a^{n+p-1}, \; b^{n+p-1}, \ldots \; l^{n+p-1}.$$

Démontrer que le déterminant correspondant est égal au déterminant de Vandermonde multiplié par la somme des combinaisons p à p, avec répétition, des lettres $a, b, \ldots l$.

(*L. Vautré*, professeur au séminaire d'Autun.)

338. — 1° L'équation barycentrique

$$\Sigma\alpha(\lambda_0^2 - \lambda_1^2) = K\sigma,$$

dans laquelle on suppose $\sigma = \Sigma\alpha$, représente une droite perpendiculaire à $M_0 M_1$; les quantités $\lambda_0 \, \mu_0, \, \nu_0, \, \lambda_1, \ldots$ étant les coordonnées tripolaires de M_0 et M_1.

2° Soit d la distance du milieu de $M_0 M_1$ au point d'intersection P des deux droites, cette distance étant regardée comme positive dans le sens $M_0 M_1$. On a

$$d = \frac{K}{2M_0M_1}$$

(*Aug. Poulain.*)

339. — On considère une famille de coniques tangentes à une conique fixe Σ, ayant, avec Σ, un foyer commun et passant par le second foyer de Σ. Montrer que toutes ces coniques ont l'axe focal de longueur constante.

(*E. N. Barisien.*)

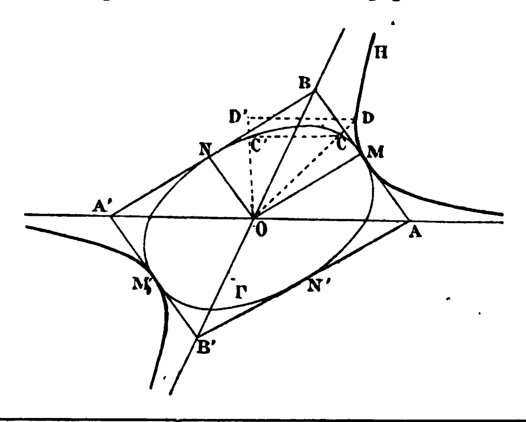
340. — On considère une ellipse Γ de centre O et la circonférence Δ décrite sur le petit axe comme diamètre. D'un point M, mobile sur Γ, on mène, à Δ, les tangentes MP, MQ.

Il existe, dans Δ, une corde P′Q′, parallèle à PQ, et telle que OP′, OQ′ soient respectivement perpendiculaires sur OP, OQ.

Démontrer que P′Q′ passe par un point fixe.

(*G. L.*)

NOTA. — Nous donnons ici la figure de la question 301, résolue p. 23 et qui a été oubliée par une erreur de mise en pages.



ERRATA

P. 24, l. 6, *au lieu* de δ, *lisez* C′.

1891, p. 270	l. 2	*au lieu de*	J′	*lisez*	— J′
»	l. (—5)	»	*bc*	»	2*bc*
p. 272	l. (—7)	»	directrice	»	direction.
p. 265	l. (—5)	»	J. S.	»	J. S. 1889.
»	l. (—3)	»	*a*	»	a_x.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 202-1-92.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CUBIQUES

Par Mme Veuve F. Prime.

(*Suite*, voir p. 25.)

17. — On sait que *les quatre tangentes, qu'on peut mener à une cubique, d'un point quelconque de la courbe, forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant* (Salmon : *Courbes planes*, 207). Ce théorème appliqué aux cubiques réciproques Q, Q′, donne les deux égalités :

(*a*) $\varpi_1(\varpi_2 ABC) = \varpi_2(GG_aG_bG_c)$,

(*b*) $\varpi_2(\varpi_1 ABC) = \varpi_1(GG_aG_bG_c)$;

d'où il résulte que :

les droites, qui joignent un même point ϖ_1 au centre de gravité du triangle de référence et aux sommets du triangle anticomplémentaire, ont un rapport anharmonique égal à celui des droites qui joignent le point réciproque ϖ_2 au point ϖ_1 et aux sommets de triangle de référence.

les droites, qui joignent un même point ϖ_1 aux centres des cercles inscrits ou ex-inscrits au triangle de référence, ont un rapport anharmonique égal à celui des droites qui joignent le point inverse ϖ_2 au point ϖ_1 et aux sommets du triangle de référence.

Ainsi H, O, K, Ω, Ω′ désignant, suivant l'usage, l'orthocentre, le centre de cercle circonscrit, le point de Lemoine et les points de Brocard, du triangle de référence, on a

$$H(OABC) = O(II_aI_bI_c)\,, \qquad O(HABC) = H(II_aI_bI_c)\,,$$
$$G(KABC) = K(II_aI_bI_c)\,, \qquad K(GABC) = G(II_aI_bI_c)\,,$$
$$\Omega(\Omega'ABC) = \Omega'(II_aI_bI_c)\,, \qquad \Omega'(\Omega ABC) = \Omega(II_aI_bI_c)\,.$$

Et ces égalités en entraînent d'ailleurs un grand nombre d'autres; telles, les suivantes :

$$K(OABC) = O(II_aI_bI_c) \quad \text{et} \quad K(HABC) = H(II_aI_bI_c),$$

qui résultent de ce que la conique HOABC est l'hyperbole de Jerobek du triangle ABC.

18. — Chaque membre des relations (*a*), (*b*), (n° 17), contenant cinq points, définit une conique; or deux coniques se coupent en quatre points, donc :

à tout point P *du plan* ABC *sont associés trois points, tels que :*
X(PABC) = P($GG_aG_bG_c$)

à tout point P *du plan* ABC *sont associés trois points, tels que :*
X(PABC) = P($II_aI_bI_c$).

19. — On sait que « *si, par quatre points fixes d'une cubique, on fait passer une conique, la corde qui réunit les deux autres points d'intersection de cette conique avec la cubique passera par un point fixe situé sur cette dernière courbe, qu'on appelle le corésiduel du système des quatre points fixes* (Salmon : *Courbes planes*, 193).

Appliquons ce théorème à quelques systèmes particuliers de quatre points des cubiques réciproques Q, Q'.

20. — Considérons une conique passant par les quatre points G, G_a (ou G_b, G_c), B, C. Prenons, comme cas particulier, les deux droites GG_a (ou G_bG_c) et BC; ces droites coupent la cubique Q aux points A, A_2; et la droite AA_2 rencontre cette cubique au point ϖ_2. ϖ_2 *est donc, sur la cubique* Q, *le corésiduel du système des quatre points* G, G_a (*ou* G_b, G_c), B, C.

Or, les droites BG, CG_a (ou BG_b, CG_c) se coupent sur la cubique Q au point G_b (ou G); il en résulte que *les droites* ϖ_2G, ϖ_2G_a, ϖ_2G_b, ϖ_2G_c *sont tangentes à la cubique* Q, *aux points* G, G_a, G_b, G_c.

On trouverait de même que ϖ_1 *est, sur la cubique* Q', *le corésiduel du système des quatre points* G, G_a (*ou* G_b, G_c), B, C *et les droites* ϖ_1G, ϖ_1G_a, ϖ_1G_b, ϖ_1G_c *sont tangentes à la cubique* Q' *aux points* G, G_a, G_b, G_c.

21. — La droite $A\varpi_1$ est tangente au point A à la cubique Q et BC coupe cette cubique au point A_2 ; ϖ_2 est donc encore *le corésiduel du système* A, B, C, ϖ_1.

Les droites ϖ_2G, ϖ_2G_a, ϖ_2G_b, ϖ_2G_c sont tangentes à la cubique Q; il en résulte que *les coniques* $ABC\varpi_1G$, $ABC\varpi_1G_a$, $ABC\varpi_1G_b$, $ABC\varpi_1G_c$ *sont tangentes à la cubique* Q, *aux points* G, G_a, G_b, G_c. De même : *les coniques* $ABC\varpi_2G$, $ABC\varpi_2G_a$, $ABC\varpi_2G_b$, $ABC\varpi_2G_c$ *sont tangentes à la cubique* Q', *aux points* G, G_a, G_b, G_c.

Remarque. — On peut établir ce théorème sans faire usage de la notion du corésiduel; car il résulte immédiatement de cette propriété de la conique $ABC\varpi_1G$ (ou G_a), d'être la transformée par points réciproques de la droite ϖ_2G (ou G_a).

(*A suivre.*)

SUR UN PROBLEME DE M. LAISANT

Par M. **F. Balitrand,** ancien élève de l'École Polytechnique.

Le problème que nous nous proposons de traiter est le suivant :

Une droite AB *se déplace de façon que les arcs parcourus par ses extrémités soient égaux; on prend le milieu* G *de* AB, *on demande d'étudier la courbe décrite par le point* G.

M. Laisant a résolu ce problème par la méthode des équipollences (*Bulletin de la Société mathématique de France*, juillet 1888), et M. Mannheim a, ensuite, appliqué à ce même problème les principes de la géométrie cinématique (*Nouvelles Annales de mathématiques*, juillet 1889). La solution que nous allons donner de cette question repose sur des principes plus élémentaires et plus généralement connus.

Cherchons d'abord le point où la droite AB touche son enveloppe.

Soit A'B' une position infiniment voisine de AB, de telle sorte que AA' = BB'.

Soit S le point de rencontre de AA' et de BB' et C le point où A'B' rencontre AB.

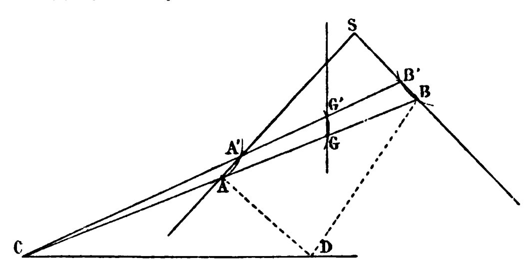


Fig. 1.

Le théorème de Ménélaüs, appliqué au triangle SAB et à la transversale CA'B', donne

$$\frac{CA}{CB} = \frac{BS}{AS}.$$

Cette relation permet d'obtenir le point C, mais la méthode suivante fournit une solution plus élégante.

Dans la recherche du point C nous pouvons remplacer les

courbes (A) et (B) par leurs tangentes SAA', SBB'. Prenons comme axes des coordonnées SA et SB; posons

$$SA = x, \qquad SB = y, \qquad AA' = BB' = \varepsilon.$$

L'équation de AB est : $Xy + Yx - xy = 0$

Celle de A'B' : $X(y + \varepsilon) + Y(x + \varepsilon) - (x + \varepsilon)(y + \varepsilon) = 0$;

ou, en ayant égard à la précédente :

$$X - x + Y - y = 0.$$

Cette équation représente une droite parallèle à la bissectrice extérieure de ASB, et passant par le sommet du parallélogramme construit sur SA et SB (*).

PREMIÈRE SOLUTION. — *Détermination de la tangente à la courbe* (**) *lieu du point* G.

Nous connaissons la position du point C. Prenons *(fig. 1)*

$$BB_1 = CA, \quad B'B_1' = CA'.$$

Dans le triangle CB_1B' les droites AA', BB', sont des transversales réciproques; donc elles rencontrent B_1B_1' en des points symétriques par rapport au milieu de B_1B_1'. Par suite, pour avoir la position limite de B_1B_1', il faut mener par B_1 une droite qui, limitée à SA et SB, ait son milieu en B_1. La tangente cherchée est la parallèle à cette droite menée par G.

2me SOLUTION. — Amenons d'abord A en A', le point G éprouve un déplacement GG_1 parallèle à AA' et égal à $\frac{AA'}{2}$. Amenons ensuite B en B', le point G_1 éprouve un déplacement G_1G' parallèle à BB' et égal à $\frac{BB'}{2}$. Mais comme $AA' = BB'$, $GG_1 = G_1G'$ et par suite GG' est parallèle à la bissectrice extérieure de l'angle GG_1G', c'est-à-dire parallèle à la bissectrice de l'angle ASB (***).

(*) Cette construction rapprochée du résultat précédent fournit le théorème de géométrie suivant : *Soit un triangle* ABC, A' *le symétrique de* A *par rapport au milieu de* BC; *la parallèle à la bissectrice extérieure de* BAC *menée par* A', *divise le côté* BC *en segments inversement proportionnels à* AB *et* AC.

(**) Les points B_1, B_1' n'ont pas été déterminés sur la figure pour simplifier celle-ci.

(***) Cette construction est susceptible d'une généralisation. Soient A, B, C trois points qui se meuvent sur trois courbes (A), (B), (C) avec des vitesses égales. Le centre de gravité G du triangle ABC décrit une courbe dont la tangente s'obtient de la façon suivante. On construit une ligne brisée

3me SOLUTION. — Prenons comme axes SA et SB; posons

$$SA = x, \qquad SB = y, \qquad AA' = BB' = \varepsilon,$$

Les coordonnées de G seront $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, celles de G′ $\left(\frac{x+\varepsilon}{2}, \frac{y+\varepsilon}{2}\right)$ et la droite GG′ a pour équation

$$X - x = Y - y.$$

cette droite est parallèle à la bissectrice de l'angle ASB

Rayon de courbure de la courbe, lieu du point G

Soient ε_a et ε_b les angles de contingence des courbes (A) et (B), soit ω l'angle de contingence de la courbe lieu du point G;

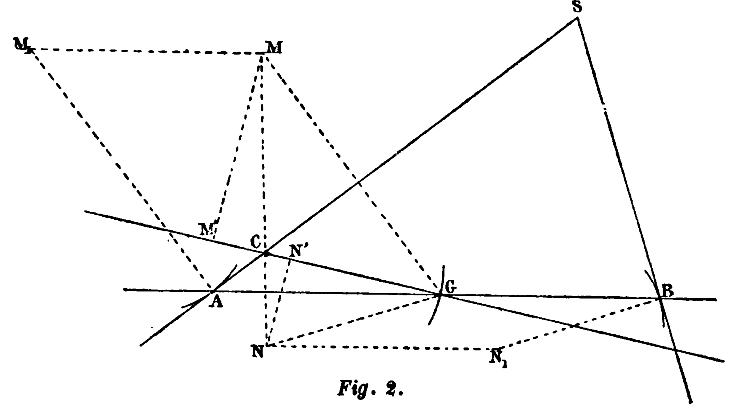


Fig. 2.

la construction de la tangente montre que

$$2\omega = \varepsilon_a + \varepsilon_b.$$

Soient (X, Y), (x, y), (x_1, y_1) les coordonnées des points G, A, B par rapport à deux axes quelconques. On a

$$2X = x + x_1, \qquad 2Y = y + y_1;$$

d'où $$2dX = dx + dx_1, \qquad 2dY = dy + dy_1.$$

$$4(dX^2 + dY^2) = dx^2 + dy^2 + dx_1^2 + dx_1^2 + 2(dx, dx_1 + dy, dy_1),$$

ou $$2d\sigma^2 = ds^2 + (dxdx_1 + dydy_1).$$

---

dont les côtés sont égaux entre eux et parallèles aux tangentes aux courbes (A), (B), (C), et l'on prend la résultante de cette ligne brisée. C'est la direction de la tangente à la courbe décrite par G. Le théorème est évidemment vrai pour un polygone de n sommets. (Voir *Mathesis*, novembre 1891.)

En appelant α, β les inclinaisons des tangentes SA, SB sur Ox :

$$2d\sigma^2 = ds^2[1 + \cos(\alpha - \beta)] = ds^2(1 + \cos\theta)\,; \quad \theta = \mathrm{ASB};$$

donc
$$d\sigma = ds\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = ds\cos\frac{\theta}{2}.$$

Par suite

$$\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b}.$$

Cette relation détermine le rayon de courbure ρ. Elle conduit à la construction suivante :

Par G, menons deux droites GM, GN, égales et parallèles à ρ_a, ρ_b. Projetons M et N en M′ et N′ sur la normale en G. On a

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{GM'}} + \frac{1}{\mathrm{GN'}}.$$

Donc, pour avoir ρ, il suffit de tracer MN, qui coupe la normale au point cherché. C'est la construction de M. Mannheim.

CALCUL D'UN DÉTERMINANT (*)

Par M. Schoute.

---

1. — Posons

$$f_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 0 & \lambda & & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & \lambda & \lambda \\ \cdot & & \ddots & & & & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & & & \ddots & & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_n, \qquad F_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & 0 & \lambda & & \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 0 & & \lambda & \lambda & \lambda \\ \cdot & & \ddots & & & & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & & & \ddots & & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}_n.$$

(*) A propos de ce déterminant et de ceux du même genre que nous avons nommés *Déterminants troués*, M. Brocard nous signale la question 445 (*N. A. M.* 1858, p. 262) et une note de M. Sylvester (*N. A. M.* 1854, p. 305).
Nous renvoyons le lecteur aux sources citées. Si nous ne nous trompons, la question 445 n'a pas été résolue? *G. L.*

En retranchant, dans le premier déterminant, la seconde colonne de la première, on trouve

$$(1) \quad f_n(\lambda) = f_{n-1}(\lambda) = \ldots\ldots = f_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

En retranchant, dans le second déterminant, la dernière rangée de la première et en développant suivant les éléments de la nouvelle première rangée, on trouve

$$F_n(\lambda) = -\lambda F_{n-1}(\lambda) + (-1)^{n-1}\lambda f_{n-1}(\lambda)$$

ou, eu égard à (1),

$$(2) \qquad F_n(\lambda) = -\lambda \left\{ F_{n-1}(\lambda) + (-1)^n \right\}.$$

D'après la définition, on a, de plus,

$$F_n(\lambda) = \sum_{1}^{n-1}{}^{k} A_{k,n}\lambda^k,$$

où les coefficients $A_{k,n}$ sont encore à déterminer.

Donc, l'identité (2) donne

$$A_{k,n} = -A_{k-1,n-1}, \qquad A_{1,n} = (-1)^{n-1};$$

d'où l'on tire $\qquad A_{k,n} = (-1)^{n-1}.$

Ainsi

$$(3) \qquad F_n(\lambda) = (-1)^{n-1}\lambda \frac{\lambda^{n-1} - 1}{\lambda - 1}.$$

En substituant $\lambda = \frac{\lambda'}{\mu}$, on trouve donc, après multiplication par μ^n et suppression des accents

$$(3) \quad F_n(\lambda, \mu) \equiv \begin{vmatrix} 0 & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda & \lambda \\ \mu & 0 & \lambda & & \lambda & \lambda & \lambda \\ \mu & \mu & 0 & & \lambda & \lambda & \lambda \\ \cdot & & \ddots & & & & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & & & \ddots & & \cdot \\ \mu & \mu & \mu & & 0 & \lambda & \lambda \\ \mu & \mu & \mu & & \mu & 0 & \lambda \\ \mu & \mu & \mu & \ldots & \mu & \mu & 0 \end{vmatrix}_n = (-1)^{n-1}\lambda\mu \frac{\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}}{\lambda - \mu}.$$

2. — Considérons maintenant le déterminant $F_n(\lambda, \mu, \varphi)$. qu'on obtient en remplaçant les n zéros de la diagonale principale de $F(\lambda, \mu)$ par les n racines $s_1, s_2, s_3 \ldots s_n$ de l'équation donnée

$$\varphi_n(s) \equiv s^n + A_1 s^{n-1} + A_2 s^{n-2} + \ldots\ldots + A_n = 0.$$

D'un coup d'œil on aperçoit la relation

$$F_n(\lambda, \mu, \varphi) = F_n(\lambda, \mu) + F_{n-1}(\lambda, \mu)\sum_1 s + F_{n-2}(\lambda, \mu)\sum_2 s + \text{etc.},$$

où $\sum_k s$ représente la somme des produits des n racines prises k à k. D'après les relations entre les coefficients A_k et les racines, on a donc aussi

$$F_n(\lambda, \mu, \varphi) = F_n(\lambda, \mu) - A_1F_{n-1}(\lambda, \mu) + A_2F_{n-2}(\lambda, \mu) - \text{etc.},$$

ou enfin, en faisant usage de (3)

$$\begin{vmatrix} s_1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda & \lambda \\ \mu & s_2 & \lambda & & \lambda & \lambda & \lambda \\ \mu & \mu & s_3 & & \lambda & \lambda & \lambda \\ \cdot & & \ddots & & & & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & & & \ddots & & \cdot \\ \mu & \mu & \mu & & s_{n-2} & \lambda & \lambda \\ \mu & \mu & \mu & & \mu & s_{n-1} & \lambda \\ \mu & \mu & \mu & \dots & \mu & \mu & s_n \end{vmatrix} = (-1)^n \frac{\lambda\varphi(\mu) - \mu\varphi(\lambda)}{\lambda - \mu}.$$

Ce résultat a été donné, sans démonstration, par E. Lucas (*Théorie des nombres*, I, p. 286).

UN DEVOIR D'ÉLÈVE

(*Suite*, v. p. 35.)

Supposons maintenant que les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ soient égales entre elles et à x', nous pourrons alors supposer, soit $x' < d$, soit $x' > d$.

Dans le premier cas

$$Y = \pm\sqrt{\frac{-a(x - x')^2}{x - d}}.$$

Je vois que je ne peux donner à x des valeurs plus grandes que d; car les résultats seraient toujours imaginaires; mais je pourrai en donner de plus petites que d. Supposons que nous fassions $x = x'$, on aura $Y = \pm 0$. A mesure que x augmentera en approchant de d, la valeur de Y augmentera indéfiniment jusqu'à ∞, qui est donnée pour $x = d$, on a donc une asymptote, représentée $x = d$; si maintenant je

donne à x des valeurs décroissantes à partir de x' on aura des valeurs pour Y qui, en partant de o, augmenteront sans cesse et seront infinies pour $x = -\infty$.

Pour construire la courbe considérée, nous ferons une

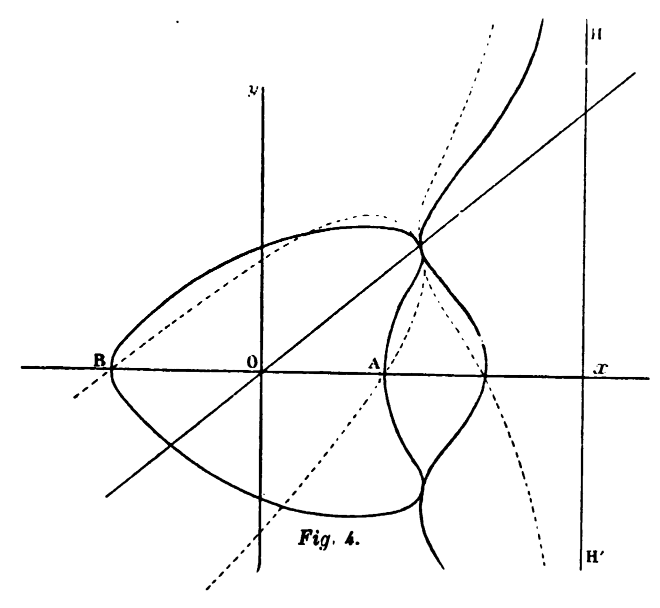


Fig. 4.

hypothèse particulière: $x' = 1$, $d = 2$, ce qui nous donne l'équation

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{-(x-1)^2}{x-2}}.$$

Cherchons les points où la courbe coupe l'axe des x; nous poserons, pour cela,

$$x^3 - 2x^2 = -x^2 + 2x - 1 \quad \text{ou} \quad x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0,$$

équation qui a deux racines positives, l'une comprise entre o et 1, l'autre entre 1 et 2, ce qui s'accorde bien avec la *figures 4*; quant à la troisième racine elle est comprise entre -1 et -2. Nous pouvons donc déterminer la forme de la courbe.

Supposons maintenant $x' > d$.

Je ne pourrai, comme précédemment, donner à x des valeurs

plus grandes que d. Pour $x = x'$, on a

$$Y = \pm o,$$

un point singulier; si je fais diminuer x depuis $x = d$

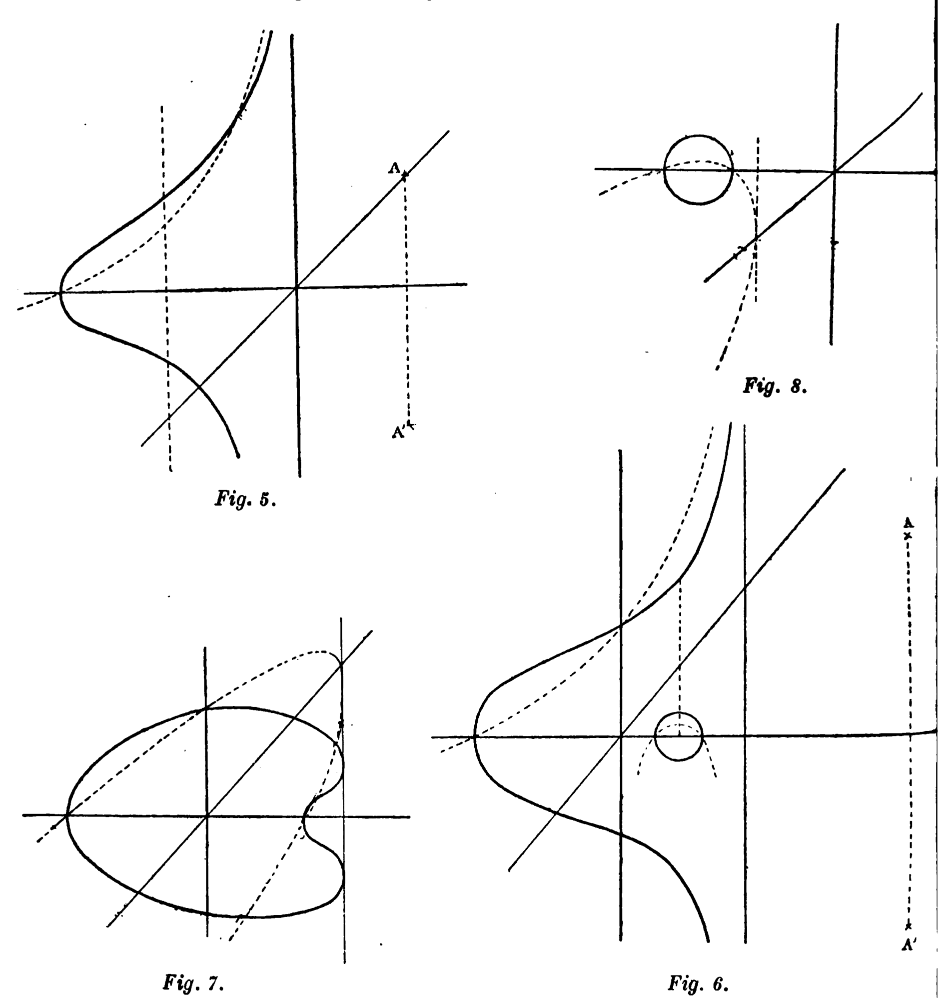


Fig. 5. *Fig. 8.* *Fig. 7.* *Fig. 6.*

jusqu'à $-\infty$, on aura des valeurs de Y qui diminueront d'abord pour croître ensuite et qui deviennent infinies quand on fera $x = -\infty$. Je prendrai pour exemple

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{-(x-1)^2}{x}},$$

équation qui tombe bien dans le cas ci-dessus.

Pour $x = 1$ on a $Y = 0$, par suite nous aurons deux points singuliers A, A'. Cherchons les points où la courbe coupe l'axe des x. Nous poserons, pour cela,

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Cette équation manque de racines positives et n'a qu'une seule racine négative comprise entre -2 et -3, mais plus rapprochée de 2; ce qui nous donne le point B. Nous pourrons donc construire la courbe auxiliaire et la courbe définitive *(fig. 5)*; la valeur minimum de Y sera donnée par des valeurs de x comprises entre 1 et 2.

Si d était positif et suffisamment grand, la forme de la courbe pourrait être la suivante *(fig. 6)*.

Comme cas particulier, nous pouvons supposer $d = x'$, alors

$$Y = \pm\sqrt{-(x - x')} = \pm\sqrt{x' - x},$$

je ne pourrai donner à x des valeurs plus grandes que x', on aura une parabole dont l'ouverture sera tournée à gauche, et la courbe aura l'aspect général indiqué par les *figures* 7, 8; à moins que le lieu ne soit imaginaire.

Supposons que les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ soient imaginaires. Nous aurons

$$Y = \pm\sqrt{\frac{-a\{(x-d)^2 + \beta^2\}}{x-d}}.$$

Je ne pourrai pas donner à x des valeurs plus grandes que d; mais x pourra diminuer indéfiniment. En faisant $x = -\infty$, on a $Y = \pm\infty$; à mesure que x croît, les valeurs de Y décroissent pour croître ensuite, quand x approche de d; elles sont infinies pour $x = d$. On a donc, dans l'intervalle, un minimum pour Y. Pour chercher ce minimum et construire la courbe prenons l'exemple particulier

$$Y = \pm\sqrt{\frac{-(x^2+1)}{x-1}};$$

élevant au carré, on aura

$$Y^2(x-1) = -x^2 - 1$$

ou

$$Y^2x - Y^2 + x^2 + 1 = 0,$$

la dérivée prise par rapport à x sera

$$Y^2 + 2x = 0,$$

remplaçant Y^2 par sa valeur on aura

$$2x - \frac{x^2 + 1}{x - 1} = 0 \qquad x^2 - 2x - 1 = 0,$$

équation qui donne

$$x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Or la valeur $1 + \sqrt{2}$ doit être rejetée puisqu'il n'y a pas

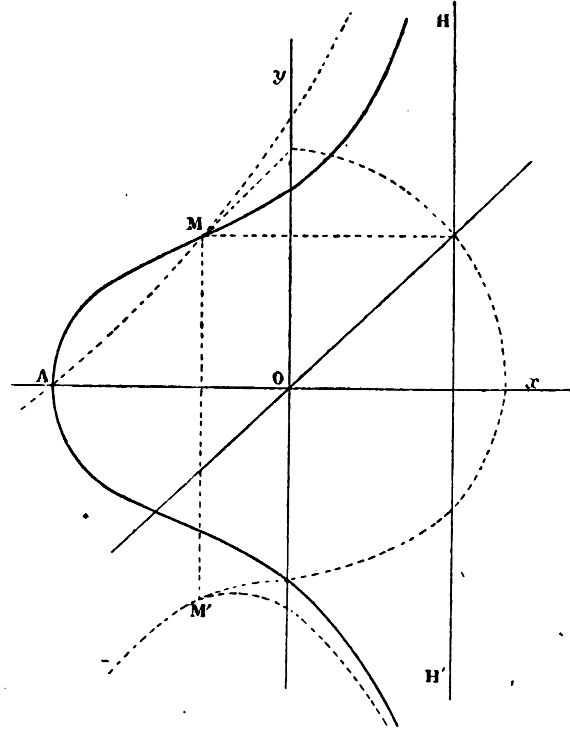


Fig. 9.

de valeurs de Y correspondantes, le minimum de Y serait donc pour $x = 1 - \sqrt{2}$,

$$Y = \sqrt{\frac{1 - 2 - 2\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2},$$

nous avons donc ainsi *(fig. 9)* les deux points M et M'. Cherchons les points où la courbe coupe l'axe des x; pour cela nous poserons

$$x = \sqrt{\frac{-x^2 - 1}{x - 1}}, \qquad \text{ou} \qquad x^3 = -1,$$

équation vérifiée par une seule valeur réelle $x = -1$ qui donne le point A. Il s'ensuit que nous pouvons construire la courbe auxiliaire et la courbe définitive. Il est clair qu'elles ont même asymptote HH' et que la tangente au point A est perpendiculaire, puisque la dérivée de l'équation générale prise par rapport à y contiendra ce facteur y. Par suite, pour tous les points, on a $y = 0$, et la tangente perpendiculaire à l'axe des x.

Ce cas est le dernier de ceux que nous avons à examiner. Les hypothèses particulières $a = 0$, $b = 0$.

Dans le premier cas, la valeur de Y peut s'écrire

$$Y = \pm \sqrt{\frac{b\left(x + \frac{c}{b}\right)}{x - d}};$$

ceci donne naissance à quatre genres de courbes, deux en supposant $b > 0$ et $-\frac{c}{b} < d$, je pourrais faire décroître x indéfiniment au-dessous de $-\frac{c}{b}$, mais les valeurs de Y ne tendront plus vers l'infini; elles auront une limite qui sera $\pm \sqrt{b}$: la courbe auxiliaire *(fig. 10)* a donc deux asymptotes parallèles au diamètre. Pour $x = -\frac{c}{b}$, on a $Y = 0$. On ne peut pas donner à x des valeurs comprises entre $-\frac{c}{b}$ et d, car les valeurs de Y seraient imaginaires, mais je peux en donner depuis d jusqu'à ∞; pour $x = d$, on a $Y = \infty$; à mesure que x croîtra, les valeurs diminueront et elles le feraient constamment, en ayant pour limite $\sqrt{b}$ quand on fera $x = \infty$. Les deux branches de gauche de la courbe auxiliaire sont donc asymptotes aux mêmes lignes. Les branches infinies à droite auront pour

asymptotes des branches paraboliques, représentées

$$y = \sqrt{x \pm \sqrt{b}}.$$

On pourrait vérifier que la différence des distances peut deve-

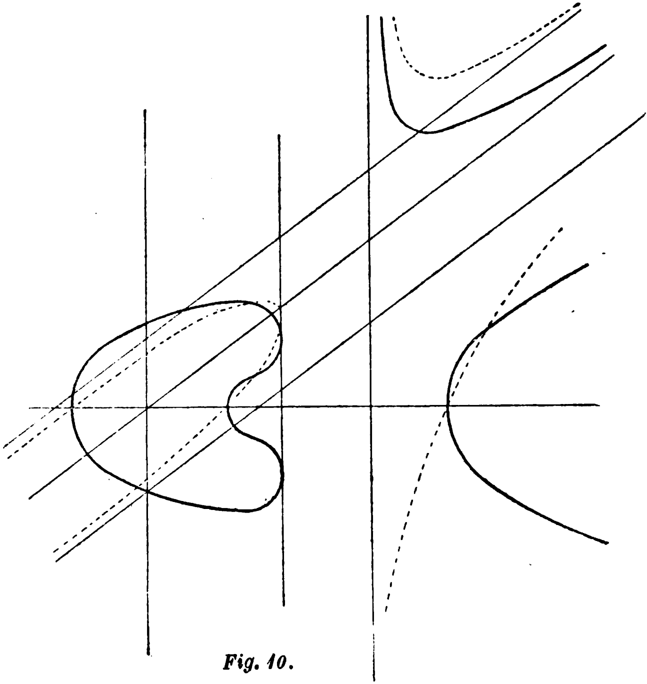


Fig. 10.

nir plus petite que toute quantité donnée, ou encore que la forme (*) de la courbe varie suivant le signe de c, qui peut faire disparaître la branche à gauche.

Comme second cas, nous allons poser $x' < d < x''$ en ayant toujours $a > o$ et les racines réelles et inégales. Revenons à la valeur de

$$Y = \pm \sqrt{\frac{a(x - x')(x - x'')}{x - d}}.$$

Je ne pourrai donner à x des valeurs plus petites que x', mais je pourrai en donner qui soient comprises entre x' et d; pour $x = x'$ on aura $Y = o$, il en sera de même pour $x = x''$.

(*) Les figures 10, 12 doivent être complétées par une branche symétrique, par rapport à ox, de la branche hyperbolique tracée en trait plein.

Mais si x croit de x' à d, les valeurs de γ iront constamment en augmentant et seront infinies pour $x = d$; ce qui donne (*fig.* 11) une branche de courbe ayant pour asymptote HH′ située à une distance d et partant du point A. Je ne pourrai faire croître x de d à x''; mais pour des valeurs plus grandes que x'', on aura des résultats qui croîtront indéfiniment. La courbe auxiliaire tracée, il est facile d'en déduire celle qu'on

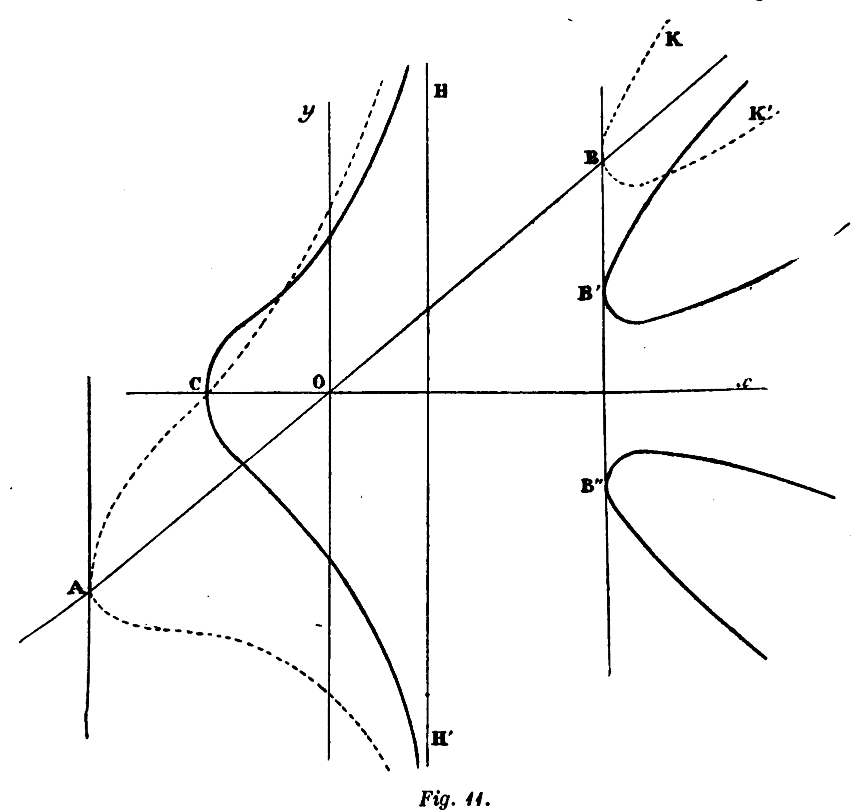


Fig. 11.

demande. De même que précédemment. on voit qu'elle ne diffère de la précédente que par la courbe de gauche qui est retournée, passant d'ailleurs au point C, ayant deux inflexions comme dans le cas précédent, pourvu que le point A soit au-dessus de l'axe des x.

Nous ne nous sommes pas occupés des asymptotes, c'est qu'il est facile de s'assurer que toutes ces courbes en manqueront de rectilignes, hormis celle qui est parallèle à l'axe des y. En effet développons

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{x - d}},$$

on a une équation $y^4x - 2x^2y^2 + \ldots = 0$, du cinquième

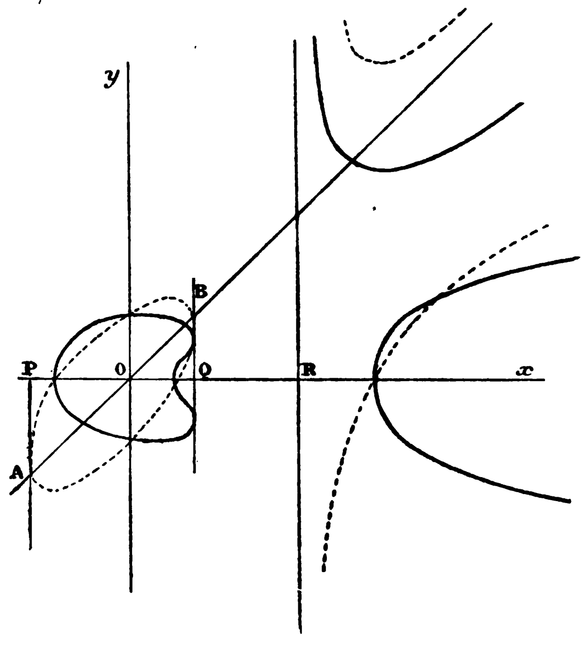


Fig. 12.

degré; et il n'y a qu'un terme du 5e degré y^4x qui donnerait $c = 0$; l'équation qui donnerait la valeur de d serait

$$4c^3d - c^2(1 + dc^4) = 0, \qquad \text{ou} \qquad 4cd - 1 - dc^4 = 0,$$

et si on y fait $c = 0$, on en tire $d = \infty$, donc toutes les courbes n'auront pas d'asymptotes rectilignes.

La courbe représentée par

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^2 - 4x - 3}{x - 2}},$$

rentre dans la variété précédente, Y pouvant s'écrire

$$Y = \pm \sqrt{\frac{(x-2-\sqrt{7})(x-2+\sqrt{7})}{x-2}};$$

on voit qu'elle donne la forme précédente, car BK ne coupe pas l'axe des x, et A est au-dessous du même axe des x.

Supposons maintenant que les racines étant réelles, on ait

$$x' < x'' < d.$$

Nous ne pouvons donner à x des valeurs au-dessous de x'; pour $x = x'$ on aura $Y = 0$, à mesure que x croît, Y croîtra aussi, puis diminuera pour repasser par o quand $x = x'$. Cela donnera donc lieu à une courbe fermée dans la courbe auxiliaire. De x'' à d les valeurs de y seront imaginaires, mais pour $x \geqslant d$ elles seront réelles, d'abord infinies puis diminueront pour finir par atteindre l'infinie en même temps que x.

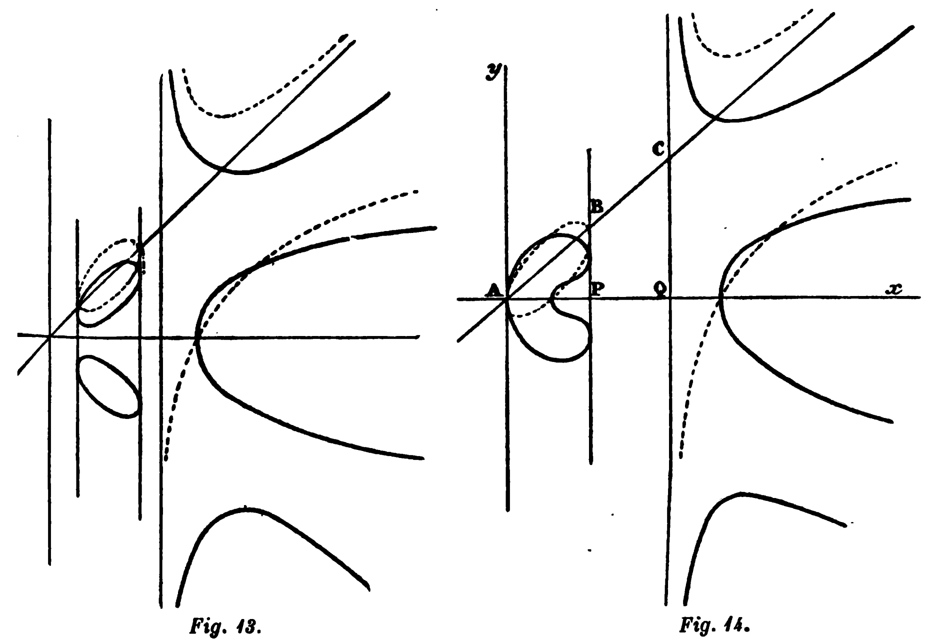


Fig. 13. *Fig. 14.*

En supposant que OP, OQ, OR représentent respectivement les trois racines x', x'', d, nous pouvons tracer la forme de la

courbe auxiliaire, et par suite celle de la courbe cherchée. mais elle pourra avoir dans ce cas diverses formes. En effet, il pourra arriver qu'une partie fermée disparaisse si la courbe auxiliaire AB est au-dessous de l'axe des x, c'est-à-dire si x' et x'' sont négatifs, ou bien si elle est toute entière au-dessus

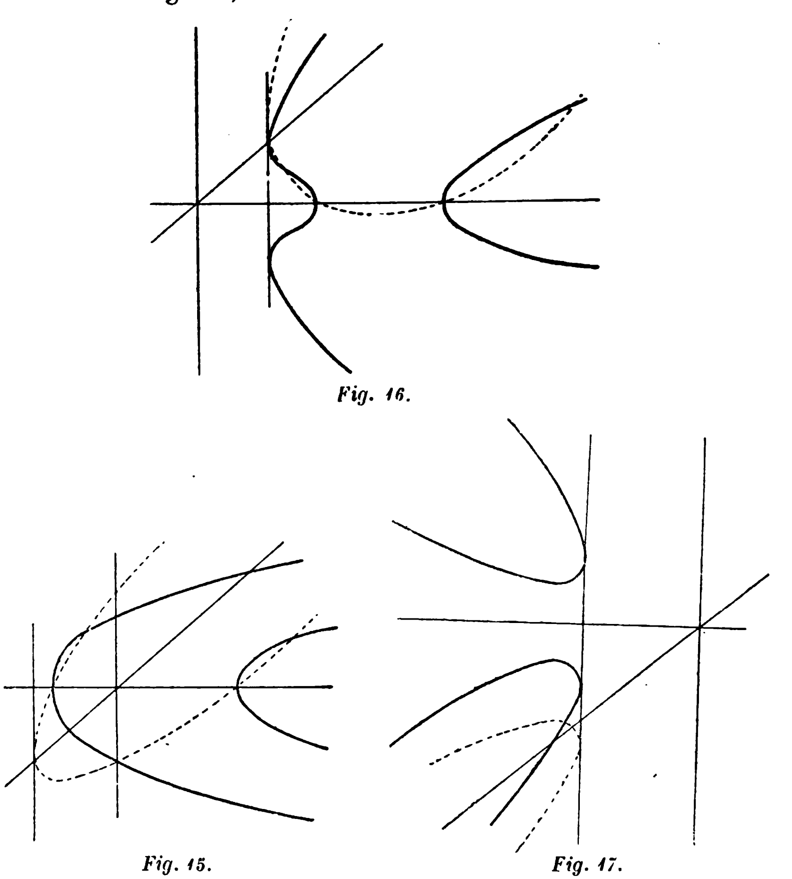

Fig. 16.

Fig. 15. Fig. 17.

de l'axe des x, il y aura deux courbes fermées séparées et symétriques. ce qui porterait le nombre des parties à cinq. Nous pouvons considérer, comme exemple de ce cas, l'équation

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}.$$

Ce que nous avons établi pour la première courbe s'appliquerait à toutes, c'est-à-dire que pour tous les points où la courbe couperait l'axe des x, la tangente est parallèle à l'axe des y.

Comme cas particulier, on pourrait supposer que d est égal à x' ou x'', alors on aurait $Y = \sqrt{x-x'}$, ce qui représenterait une parabole dont on devrait porter les ordonnées au-dessous et au-dessus du diamètre $y = x$. Cela donnerait plusieurs formes de courbes, suivant que x serait $> o < o = o$, nous les indiquons *(fig. 15, 16, 17)*.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMENS

Construire la courbe qui correspond à l'équation

$$(y - x)^3 y^2 + x(x - y) + \lambda = o. \qquad (\lambda > o)$$

Etudions d'abord la courbe dans le voisinage de la bissectrice, aux points qui sont à l'infini, sur cette droite.

Transformons homographiquement (*), au moyen des formules:

$$x = \frac{1}{x'}, \ y = \frac{y'}{x'};$$

nous avons à étudier, aux points qui se trouvent sur oy', l'équation transformée

$$(1) \qquad (y' - 1)^3 y'^2 + (1 - y')x'^3 + \lambda x'^5 = o.$$

Transportons les axes, parallèlement à eux-mêmes, au moyen des formules

$$y' - 1 = Y, \quad x' = X;$$

l'équation devient

$$(2) \qquad Y^3 + 2Y^4 - Yx^3 + Y^5 + \lambda X^5 = o.$$

Nous allons, en appliquant la méthode de Puiseux, étudier cette courbe à l'origine.

A cet effet écrivons (2) sous la forme

$$\frac{Y^3}{X^3} + X\left(2\frac{Y^4}{X^4} - \frac{Y}{X}\right) + X^2\left(\frac{Y^5}{X^5} + \lambda\right) = o.$$

Posant (**) $\qquad \frac{y}{x} = \alpha \qquad \frac{\alpha}{x^\theta} = \mu + \varepsilon,$

On a d'abord

$$\alpha^3 + X(2\alpha^4 - \alpha) + X^2(\alpha^5 + \lambda) = o.$$

La ligne de Newton, correspondante, est formée de deux côtés dont les coefficients angulaires sont, respectivement,

$$\theta' = 1, \qquad \theta'' = \frac{1}{2}.$$

(*) Pour les explications détaillées que comporte cette méthode, voyez *Supplément*, p. 233.

(**) Nous prenons les notations habituelles (*loc. cit.*, p. 123).

Pour $\theta' = 1$, on trouve $\mu' = \lambda$; pour $\theta'' = \frac{1}{2}$, on a $\mu' = \pm 1$. Finalement, la courbe, étudiée dans le voisinage de l'origine O, présente la disposition, indiquée sur la figure. Les bras 1, 2. correspondent à l'équation

$$y = x^2(\lambda + \varepsilon);$$

les bras 3, 4 à l'équation

$$y = x^{\frac{3}{2}}(\pm 1 + \varepsilon').$$

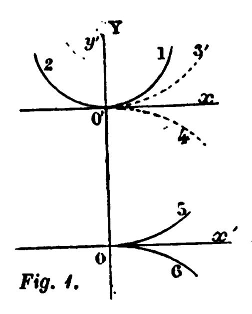


Fig. 1.

Revenons maintenant à l'équation (1) pour étudier la courbe dans le voisinage de l'origine de O.

Appliquant de nouveau la méthode de Puiseux, nous mettons l'équation (1) sous la forme

$$-\frac{y'^2}{x'^2} + x'\left(3\frac{y'^3}{x'^3} + 1\right) - x'^2\left(\frac{y'}{x'} + 3\frac{y'^4}{x'^4}\right) + x'^3\left(\lambda + \frac{y'^5}{x'^5}\right) = 0.$$

En posant $\qquad \frac{y'}{x'} = \alpha, \qquad \frac{\alpha}{x'^\theta} = \mu + \varepsilon,$

on trouve $\qquad \theta = \frac{1}{2}, \qquad \mu = \pm 1.$

et, par conséquent, $\qquad y' = x'^{\frac{3}{2}}(\pm 1 + \varepsilon).$

A cette équation correspondent les bras 5, 6.

Revenant maintenant à l'équation initiale, pour discuter la forme de la courbe qui lui correspond, on voit que les bras 1, 2, 3, 4, 5, 6 donnent, dans la fig. transformée les bras 1', 2', 3', 4', 5', 6'.

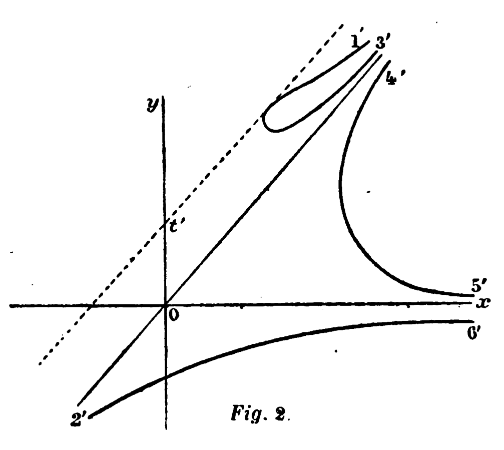


Fig. 2.

Pour achever la discussion de la courbe, on peut couper celle-ci par des transversales parallèles à la première bissectrice ($y - x = t$). On trouve, pour déterminer y,

$$y^2t^3 - ty + t^2 + \lambda = 0,$$

Cette équation a ses racines réelles

si l'on a $t^3 + t\lambda - \frac{1}{2} < 0$.

Le premier membre présentant une lacune entre deux termes de même signe (λ est supposé positif), cette inégalité revient à celle-ci

$$t - t' < 0.$$

désignant la racine réelle de l'équation

$$t^3 + t\lambda - \frac{1}{4} = 0.$$

On voit que t' est positif. D'après tous ces renseignements, on peut tracer la courbe dont la forme générale est indiquée sur la figure 2.

CORRESPONDANCE

(Extrait d'une lettre de M. Catalan.)

M. *Baschwitz* (de Berlin) a indiqué, pour $L(1 + x)$ une formule, aisée à vérifier et fort remarquable.

Voici le théorème qu'il donne.

On a $$L(1 + x) = \sum_1^\infty \frac{y^n - (y - x)^n}{n(y + 1)^n},$$

pourvu que $\left(\frac{y - x}{y + 1}\right)^2$ *soit une fraction proprement dite.*

EXERCICE ÉCRIT

53. — Trouver le lieu des foyers des ellipses Γ doublement tangentes à une ellipse donnée Γ', la corde de contact restant parallèle au grand axe de Γ'; l'ellipse Γ passant, en outre, par les foyers de Γ'. *(Barisien.)*

Note sur l'exercice 52.

Soient λ, μ les coordonnées de A; l'équation de Δ est

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y = 0,$$

et les ordonnées des points M, M', M″ sont les racines de l'équation

(1) $$y^3 - 4p(\lambda - p)y - 8p^2\mu = 0.$$

Comme p est positif, cette équation aura ses racines réelles, si l'on a

$$\lambda - p > 0, \qquad -2(\lambda - p)^3 + 27p^3\lambda < 0.$$

En posant

$$\frac{p - \lambda}{p} = 3\theta,$$

ces conditions deviennent

$$\theta < 0, \qquad 2\theta^3 - 3\theta + 1 < 0$$

ou $$\theta < 0, \qquad (\theta - 1)\left(\theta + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(\theta - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) < 0.$$

Finalement, on a la condition unique :

$$\theta + \frac{1+\sqrt{3}}{2} < 0.$$

En supposant $$\theta = -\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

on détermine, sur P, un point correspondant A′. Si l'on considère la corde principale A′A″, la circonférence dont le centre est situé sur l'arc A′OA′ coupe la parabole en deux points réels et deux points imaginaires. En plaçant A sur l'autre partie de P, on a au contraire quatre points réels.

Cherchons quelle est, exactement, la position de A′.

Pour $$\theta = -\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

on a $$\frac{\lambda}{p} = \frac{5+3\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{\mu}{p} = \sqrt{5+3\sqrt{3}}.$$

Dans ces formules λ, μ désignent les coordonnées du point A′; celui-ci est donc bien déterminé.

Il résulte, de la définition du point A′, que si l'on prend ce point pour centre d'une circonférence Δ′, de rayon O′A; Δ′ touchera la parabole P en un point H et la coupera de nouveau en H′.

On peut chercher les coordonnées des points H, H′.

L'équation (1), quand on l'applique au cas où le centre de Δ coïncide avec A′, donne

$$\frac{y^3}{p^3} - 6\frac{y}{p}(1+\sqrt{3}) - 8\sqrt{5+3\sqrt{3}} = 0.$$

On reconnaît facilement, la chose est d'ailleurs évidente *a priori*, que cette équation admet une racine double.

En désignant par y' (*) l'ordonnée de H, par y'' celle de H′, on a

$$-\frac{2y'}{p} = \frac{y''}{p} = 4\frac{\sqrt{5+3\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}} = 2\sqrt{(5+3\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$$
$$= 2\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

Nota. — Le capitaine Barisien nous a adressé une solution de cet exercice.

BIBLIOGRAPHIE

Synopsis der hoeheren Mathematik, von J. Hagen S. J., Director der Sternwarte des Georgetown College, Washington. — Erster Band. *Arithemische und algebraische Analyse;* grand in-4° de 400 pages. Berlin. L. Dames, éditeur, 47, Tauben-Strasse, 1891. Prix : 37 fr. 50 c.

Ceux qui prennent part au mouvement des mathématiques modernes ou qui tiennent, seulement, à le suivre, savent que la principale difficulté, dans les recherches qu'on entreprend sur un point déterminé de l'Ana-

(*) Dans une équation de la forme

$$x^3 + px + q = 0.$$

qui admet une racine double; celle-ci est égale à $-\frac{3q}{2p}$. La racine simple est égale à $\frac{3q}{p}$.

lyse, porte sur la détermination des travaux qui ont été antérieurement entrepris sur le sujet qu'on a choisi. Le livre du P. Hagen sera, pour tous ces chercheurs de vérités nouvelles, un guide bien précieux. L'encyclopédie des connaissances mathématiques, quels que soient les efforts tentés pour la rédiger, ne peut aboutir qu'à une production assez imparfaite. Cette impuissance a deux causes très évidentes et malheureusement *irréductibles*. En premier lieu, le domaine de la science mathématique est aujourd'hui tellement étendu; on y fait usage, pour exprimer les idées qu'on y développe d'une langue si variée, qu'il est matériellement impossible à un livre, si considérable, soit-il, de faire un résumé complet des vérités acquises ou de signaler, même, tous les mémoires qui ont été écrits sur un sujet particulier. En second lieu, il est impossible, en admettant que le livre idéal que nous imaginons, livre qui résumerait la science mathématique à un moment donné, ait pu être écrit, qu'il ne soit pas bientôt insuffisant au travailleur, en quête des propriétés inconnues. C'est que le mouvement incessant des découvertes amène à chaque instant, sans trêve, sans interruption, un flux considérable d'ouvrages nouveaux; or, ces ouvrages, par le seul fait de leur nouveauté, sont précisément ceux qu'il importe le plus de connaître.

Il n'en est pas moins de la plus grande utilité de posséder des livres comme celui que vient d'écrire le P. Hagen, renfermant sur les points principaux de l'*Analyse mathématique* les renseignements essentiels. Comme le dit l'auteur, dans sa préface, le livre qu'il présente au public mathématique est une sorte d'*Encyclopédie des mathématiques supérieures*. Il se distingue des ouvrages du même genre par plusieurs points et notamment par ce fait qu'il signale, sur une partie déterminée, les lacunes qu'elle comporte encore.

Voici, pour que le lecteur puisse se faire une idée de l'ensemble du livre du P. Hagen les titres des douze chapitres qui le composent:

Théorie des nombres.	*Théorie des différences et des sommes.*
Théorie des grandeurs complexes.	*Théorie des fonctions.*
Combinaisons.	*Déterminants.*
Séries.	*Invariants.*
Produits infinis et Facultés (*).	*Théorie des substitutions.*
Fractions continues.	*Théorie des équations.*

Cet ouvrage de P. Hagen mérite d'être loué à tous les égards; il a dû coûter à celui qui l'a écrit de longues années de recherches. Ceux qui ont le courage de se donner à un pareil labeur rendent aux autres un inappréciable service; et l'on peut dire, le mot n'est que juste, qu'ils se sacrifient pour eux en leur donnant un temps qu'ils eussent pu consacrer à leurs travaux personnels.

L'ouvrage que nous signalons à toute l'attention de nos lecteurs sera

---

(*) On sait, d'après *Heine*, que les *Facultés* sont les fonctions qui correspondent à l'identité

$$\Omega(q, \xi) \equiv (1 - q)(1 - q^2) \ldots (1 - q^\xi)$$

en supposant $\Omega(q, o) = 1.$

Les *Facultés* de Kramp correspondent à l'identité

$$z^{\frac{m}{d}} \equiv z(z + d)(z + 2d) \ldots (z + \overline{m - 1}d).$$

Quand $z = d$, la *Faculté* devient, au facteur d^m près, la *factorielle m*.

complété, à bref délai, nous l'espérons, par trois autres volumes. Le deuxième volume traitera de la *Géométrie Analytique et Synthétique.* Nous souhaitons bon succès à cette utile et savante publication. G. L.

QUESTION 310

Solution par Mme Ve F. PRIME, à Bruxelles.

On considère une courbe U *et deux droites fixes* Ox, Oy. *Ayant pris sur* U, *un point mobile* M, *on mène, par ce point, des parallèles aux droites* Ox, Oy ; *on obtient ainsi, sur ces droites, deux points* P, Q.

La droite PQ *enveloppe une courbe* V *et touche celle-ci en un certain point* M'. *On demande quelle doit être la courbe* U *pour que* MM' *passe constamment par le point* O. (G. L.)

Si X, Y désignent des coordonnées courantes, et x, y les coordonnées de M, l'équation de PQ est :

$$Xy + Yx = xy,$$

et celle de la droite P'Q' infiniment voisine :

$$Xdy + Ydx = d\overline{xy}$$

La droite qui joint le point M' à l'origine O est donc :

$$\frac{X}{-xd\overline{xy} + \overline{xy}dx} = \frac{Y}{-\overline{xy}dy + yd\overline{xy}}.$$

Cette droite coïncidera avec la droite OM si :

$$\frac{-xd\overline{xy} + \overline{xy}dx}{x} = \frac{-\overline{xy}dy + yd\overline{xy}}{y}.$$

L'équation différentielle de la courbe U est donc :

$$ydx + xdy = 0.$$

D'où

$$xy = K,$$

équation représentant toutes les hyperboles ayant les axes de coordonnés pour asymptotes.

Nota. — Solutions analogues par MM. Svéchnicoff et Baudran.

ERRATUM. — P. 47, l. 14, au lieu de Autun, *lisez* Autrey.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 3880-2-92.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CUBIQUES

Par Mme Veuve F. Prime.

(*Suite* et *fin*, voir p. 49.)

22. — Les droites BC, AG rencontrant la cubique Q aux points A_2, G_a, le corésiduel du système des quatre points A, B, C, G, est le point, de la cubique Q, où viennent concourir les droites G_aA_2, G_bB_2, G_cC_2. Or la conique $ABC\varpi_1G$ est tangente à la cubique Q au point G; ce corésiduel doit donc encore se trouver sur la droite ϖ_1G. Et, comme G_aA_2 est parallèle à $A\varpi_1$, il est l'anticomplémentaire de ϖ_1; ce qui permet d'énoncer ce théorème de géométrie :

Lorsqu'un triangle inscrit au triangle de référence est perspectif avec ce triangle, il est encore perspectif avec le triangle anticomplémentaire ; et le second centre de perspective est l'anticomplémentaire du réciproque du premier.

Lorsqu'un triangle inscrit au triangle de référence est perspectif avec ce triangle, il est encore perspectif avec le triangle anticomplémentaire; et le second centre de perspective est l'antisupplémentaire de l'inverse du premier.

Si, dans ce qui précède, on substitue au point G l'un des points G_a, G_b, G_c, on trouvera que le triangle $A_2B_2C_2$ est perspectif avec chacun des triangles GG_cG_b, G_cGG_a, G_bG_aG et que les trois centres de perspective sont situés sur les droites ϖ_1G_a, ϖ_1G_b, ϖ_1G_c.

Donc : « *Tout triangle* $A_2B_2C_2$ *inscrit au triangle de référence et perspectif avec ce triangle, est perspectif avec quatre autres triangles; et les centres de perspective forment un système homologique au système* $GG_aG_bG_c$ *(ou* $I\ I_bI_c$*); le pôle d'homologie étant le réciproque (ou l'inverse) du centre de perspective des triangles* ABC, $A_2B_2C_2$. »

Ainsi : 1°, *les droites qui joignent les sommets du triangle complémentaire aux centres des circonférences inscrite et ex-inscrites, se coupent trois à trois sur les droites menées du point de Lemoine à ces mêmes centres.*

2°, *les droites qui joignent les sommets du triangle orthique aux centres des circonférences inscrite ou ex-inscrites, se coupent trois à trois sur les droites menées, de ces mêmes centres, au centre de la circonférence circonscrite* (*).

Nous désignerons par ϖ_1' le centre de perspective des triangles $G_aG_bG_c$, $A_2B_2C_2$ et par ϖ_2' celui des triangles $G_aG_bG_c$, $A_1B_1C_1$; ϖ_1' appartient à la cubique Q; et ϖ_2', à la cubique Q'.

23. — Les droites G_bG_c, GG_a se coupent sur la cubique Q au point A et aucune d'elles n'est tangente à la cubique. Le corésiduel du système des quatre points G, G_a, G_b, G_c est donc le point ϖ_1 commun aux tangentes à la cubique Q aux points A, B, C; et comme la droite $\varpi_1\varpi_2$ est la quatrième tangente qu'on peut mener, à la cubique Q, par le point ϖ_1, *la conique* $GG_aG_bG_c\varpi_2$ *est tangente à la cubique* Q *au point* ϖ_2*; la tangente commune est la droite* $\varpi_1\varpi_2$.

De même : *la conique* $GG_aG_bG_c\varpi_1$ *est tangente à la cubique* Q' *au point* ϖ_1, *et la tangente commune est encore la droite* $\varpi_1\varpi_2$.

24. — ϖ_1 étant, sur la cubique Q, le corésiduel du système des points G, G_a, G_b, G_c, la conique $GG_aG_bG_c\varpi_1'$ est tangente à la cubique Q, au point G ou au point ϖ_1'. Pour décider lequel de ces deux points est le point de contact, observons que les coniques $GG_aG_bG_c\varpi_1'$, $GABC\varpi_1$ sont homothétiques inverses et ont, pour centre d'homothétie, le point G. Dès lors, la conique $GABC\varpi_1$ étant tangente à Q, au point G, il en sera de même de la conique $GG_aG_bG_c\varpi_1'$.

De là, ce théorème : *Les coniques* $GG_aG_bG_c\varpi_1'$, $GG_aG_bG_c\varpi_2'$ *sont, respectivement, tangentes aux cubiques* Q, Q' *au même point* G.

25. — Les droites $A\varpi_2$, BC rencontrent la cubique Q au même point A_2 sans qu'une d'elles lui soit tangente, tandis que la conique $ABC\varpi_1\ \varpi_2$ est tangente à la cubique Q, au point ϖ_1. Il en résulte que *les tangentes à la cubique* Q, *aux points* A_2, B_2, C_2, ϖ_1, *concourent en un même point de cette courbe; ce point est le corésiduel du système* A, B, C, ϖ_2.

De même : *Les tangentes à la cubique* Q' *aux points* A_1, B_1, C_1

(*) Voir : A. Boutin : *Exercices divers : Journal de Mathématiques élémentaires*, 1891, page 184.

ϖ_2 *rencontrent* Q′ *en un même point qui est le corésiduel du système* A, B, C, ϖ_1.

26. — Les droites BC_2, CB_2 se coupant sur la cubique Q, au point A; et les droites BB_2, CC_2 rencontrant la cubique au même point ϖ_2, ϖ_1 est encore le corésiduel du système B, C, B_2, C_2. *La cubique* Q *détermine donc, par ses intersections avec les côtés du triangle* $A_2B_2C_2$, *un triangle perspectif avec ce triangle,* ϖ_1 *étant le centre de perspective.*

De même: *La cubique* Q′ *coupe les côtés du triangle* A_1B_1C *aux sommets d'un triangle perspectif avec le triangle* $A_1B_1C_1$, ϖ_2 *étant le centre de perspective.*

27. — La droite ϖ_1 G rencontrant la cubique Q au point ϖ_1', la conique BCB_2C_2G passe par ϖ_1' et il en est de même des coniques CAC_2A_2G, ABA_2B_2G. Donc :

Lorsqu'un triangle A′B′C′, *inscrit au triangle de référence, est perspectif avec ce triangle, les coniques* BCB′C′G, CAC′A′G, ABA′B′G *passent par l'anticomplémentaire du réciproque du centre de perspective.*

Lorsqu'un triangle, inscrit au triangle de référence, est perspectif avec ce triangle, les coniques BCB′C′I, CAC′A′I, ABA′B′I *passent par l'antisupplémentaire de l'inverse du centre de perspective.*

Ainsi : 1° *Si* A′, B′, C′, *sont les pieds des bissectrices intérieures, les coniques* BCB′C′G, CAC′A′G, ABA′B′G *passent par le centre des parallèles égales.*

2° *Si* A′B′C′ *est le triangle orthique, les coniques* BCB′C′I, CAC′A′I, ABA′B′I *passent par l'antisupplémentaire du centre du cercle circonscrit.*

3° *Si* A′B′C′ *est le triangle complémentaire, ces coniques passent par l'antisupplémentaire du point de Lemoine.*

Et 4° *la circonférence* BIC *passe par l'antisupplémentaire du point où la bissectrice extérieure de l'angle* A *rencontre la circonférence circonscrite.*

28. — *Quelques cubiques particulières dans le système des coordonnées normales.*

1° Si le point ϖ_1 coïncide avec le centre de gravité du triangle de référence, ϖ_2 devient le point de Lemoine de ce triangle; et l'on a :

$$\varpi_1 \equiv ax = by = cz, \qquad \varpi_2 \equiv \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

$$\Delta \equiv ax + by + cz = 0, \quad \Delta' \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0;$$

Δ est donc la droite de l'infini et Δ' la droite de Lemoine;

$$\Gamma \equiv \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0, \qquad \Gamma' \equiv \frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz} = 0,$$

Γ est la circonférence circonscrite; Γ' est l'ellipse de Steiner;

$$Q \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0, \qquad Q' \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = 0,$$

Q' est la cubique connue sous le nom de *cubique des dix-sept points* (voir Vigarié, *loc. cit.* et plus loin, pp. 88 et 90); nous proposons d'appeler l'autre la *cubique des douze points*. Elle passe en effet par douze points remarquables: A, B, C, I, I_a, I_b, I_c, G, K et les points où les symédianes rencontrent les côtés du triangle de référence.

2° Si le point ϖ_1 est le centre du cercle circonscrit, les cubiques Q, Q' coïncident et ont pour équation commune:

$$Q \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est précisément l'équation combinée des bissectrices intérieures des angles du triangle de référence; donc dans ce cas, les cubiques Q, Q' se réduisent à trois droites.

3° Si ϖ_1 est l'orthocentre du triangle de référence,

$$\varpi_1 \equiv x \cos A = y \cos B = z \cos C,$$

$$\Delta \equiv x \cos A + y \cos B + z \cos C = 0,$$

Δ est donc l'axe orthique,

$$\Gamma \equiv \frac{\cos A}{x} + \frac{\cos B}{y} + \frac{\cos C}{z} = 0,$$

et

$$Q \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = 0.$$

Il résulte de la théorie générale que cette cubique est tangente à l'hyperbole de Jerabek et aux coniques de Boutin (*J. M. E.* 1891, p. 80, 81.)

4° A la page 96 du premier volume de la *Revue de mathématiques spéciales*, de M. Niewenglowski, on trouve l'équation :

$$\Sigma x(y^2 - z^2)(\cos B \cos C - \cos A) = 0 \qquad (\alpha)$$

comme réponse à la question suivante proposée par M. J. G. Darboux :

« *On considère les coniques circonscrites à un triangle et telles que les normales à ces coniques menées par les sommets du triangle soient concourantes. Lieu de leur point de concours ; même question pour les coniques inscrites, les normales étant menées aux points de contact des côtés du triangle.* »

On remarquera que la cubique (α) passe par les points où la cubique définie au 3° coupe la cubique inverse.

SUR LA DÉTERMINATION ANALYTIQUE
DE L'AIRE D'UN TRIANGLE

Par M. **C. A. Laisant**, docteur ès sciences.

Dans la plupart des cours, on détermine l'aire d'un triangle en employant la distance d'un point à une droite, ce qui introduit un radical, un double signe, et par suite une incertitude sur le signe.

Mieux vaudrait, ce me semble, définir tout d'abord les signes des aires par la convention suivante, conforme à celles de la trigonométrie et des coordonnées polaires sur les signes des angles : « L'aire d'un triangle ABC est positive, quand le sens de circulation de A à B, B à C, C à A, par rapport à un point intérieur quelconque est le sens positif des angles ou des arcs en trigonométrie. Il s'ensuit qu'un observateur parcourant le périmètre dans le sens ABC laisse constamment sur sa gauche l'intérieur de l'aire; et cette convention s'étend à un périmètre fermé quelconque. »

Alors

$$A_1A_2A_3 = A_2A_3A_1 = A_3A_1A_2 = -A_3A_2A_1 = -A_1A_3A_2 = -A_2A_1A_3$$

et l'on a *toujours :*

$$A_1A_2A_3 = DA_1A_2 + DA_2A_3 + DA_3A_1,$$

en grandeur et en signe, quel que soit le point D.

D'après cela, on a les lemmes évidents qui suivent :

I. — Si A_1A_2 est parallèle à l'axe des x,

$$A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\sin\theta\,(x_2 - x_1)(y_3 - y_1).$$

II. — Si A_1A_3 est parallèle à l'axe des y,

$$A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\sin\theta\,(x_2 - x_1)(y_3 - y_1).$$

Ceci posé, soit maintenant $A_1A_2A_3$ un triangle quelconque. Menons A_2C parallèle à OY, A_3C parallèle à OX, les droites A_2C, A^3C se rencontrant en C. Les coordonnées de C sont x_2 et y_3.

Nous avons

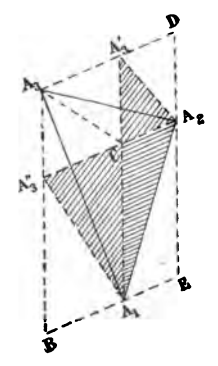
$$A_1A_2A_3 = CA_1A_2 + CA_2A_3 + CA_3A_1\ ;$$

et, en posant $\frac{1}{2}\sin\theta = k$,

$$CA_1A_2 = k(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) \qquad \text{(lemme II)}$$
$$CA_2A_3 = -CA_3A_2 = -k(x_3 - x_2)(y_2 - y_3) \qquad \text{(lemmes I et II)}$$
$$CA_3A_1 = k(x_3 - x_2)(y_1 - y_3) \qquad \text{(lemme I)}$$

D'où par addition

$$A_1A_2A_3 = k(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$
$$= \frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$



formule connue, qui ne donne prise à aucune ambiguïté, et représente *toujours* l'aire du triangle, en grandeur et en signe.

Nous avons à dessein, dans la démonstration précédente, omis toute figure, pour montrer combien le raisonnement est facile dans toute sa généralité. Dans la pratique de l'enseignement, on pourra tracer des figures, mais en faisant observer qu'elles ne particularisent rien.

Voici du reste une transformation d'aires qui permet de se faire une idée juste de la méthode; elle pourrait, à la rigueur,

constituer une démonstration purement géométrique. Menons par les trois sommets du triangle $A_1A_2A_3$ des parallèles aux axes coordonnés. L'un des points d'intersection C est intérieur, et l'on a

$$A_1A_2A_3 = CA_1A_2 + CA_2A_3 + CA_3A_1 = CA_1A_2 + CA_2A'_3 + CA''_3A_1.$$

L'aire cherchée est donc équivalente à celle de la partie ombrée sur la figure et le double de cette aire est évidemment $A_3BED - A_3A''_3CA'_3$, $\sin\theta\,[(x_2 - x_3)(y_3 - y_1) - (x_1 - x_3)(y_3 - y_2)]$; expression identique à celle que nous avons trouvée plus haut.

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UNE FORME QUADRATIQUE
EN UN PRODUIT DE DEUX FACTEURS LINÉAIRES

Par **G. Méténier**, professeur au collège de Saint-Flour.

1. Théorème. — *Étant donnée une forme quadratique de* n *variables* $x_1, x_2, \ldots x_n$;

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots$$

soit Δ *le discriminant de cette forme. On considère la forme quadratique par rapport aux variables* $u_1, u_2, \ldots u_n$:

$$\begin{vmatrix} & & & \cdot & \alpha_1 & u_1 \\ & & & \cdot & \alpha_2 & u_2 \\ & \Delta & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_n & u_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Phi(u_1, u_2, \ldots u_n),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *étant des constantes. La condition nécessaire et suffisante, pour que la forme* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *se décompose en un produit de deux facteurs linéaires, dont l'un est*

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n$$

est que la forme quadratique $\Phi(u_1, u_2, \ldots u_n)$ *soit identiquement nulle.*

Nous allons montrer d'abord que la condition est nécessaire Supposons que l'on ait :

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n),$$

et considérons le système de $n + 1$ équations :

(1) $f'_{x_1} + 2\mu\alpha_1 + 2\xi u_1 = 0, \quad f'_{x_2} + 2\mu\alpha_2 + 2\xi u_2 = 0, \dots$
$$f'_{x_n} + 2\mu\alpha_n + 2\xi u_n = 0,$$

(2) $$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_n x_n = 0,$$

linéaires et homogènes par rapport aux quantités $x_1, x_2, \dots x_n$, μ et ξ, et dans lesquelles on peut considérer ces quantités comme des inconnues, $u_1, u_2, \dots n_n$ étant des paramètres arbitraires.

Des équations (1) on tire :

$$x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \dots + x_n f'_{x_n} = -2\mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)$$
$$- 2\xi(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n).$$

Appliquons le théorème des fonctions homogènes et tenons compte de l'équation (2); cette relation deviendra :

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = -\xi(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n),$$

ou en vertu de l'hypothèse,

$$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = -\xi(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n).$$

A cause de l'équation (2) le premier membre de cette relation est nul. Donc il en est de même du second et l'on a :

(3) $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n = 0,$$

car ξ doit être supposé différent de zéro, sans quoi les équations (1) seraient indépendantes des paramètres arbitraires $u_1, u_2, \dots u_n$ et l'on a supposé le contraire.

Alors le système des $n + 2$ équations linéaires et homogènes (1), (2) et (3) entre les $n + 2$ inconnues $x_1, x_2 \dots x_n$, μ et ξ ayant son déterminant nul, on aura $\Phi(u_1. u_2, \dots u_n)$ identiquement nul par rapport aux lettres $u_1, u_2, \dots u_n$, puisque la forme quadratique $\Phi(u_1, u_2, \dots u_n)$ est ce déterminant. Ainsi, lorsque la forme quadratique $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ est décomposable en un produit de deux facteurs linéaires, la condition est vérifiée. Donc elle est nécessaire.

Elle est suffisante; car si $\Phi(u_1, u_2, \dots u_n)$ est identiquement nul, l'une au moins des équations (1), (2), (3) est la conséquence des autres. Des équations (1) tirons $\xi u_1, \xi u_2, \dots \xi u_n$, et substituons dans (3), nous aurons :

$$x_1 f'x_1 + x_2 f'x_2 + \dots + x_n f'_{x_n} = -2\mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n),$$

ou bien

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = -\mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n).$$

Cette relation est identique; car, à cause des arbitraires $u_1, u_2, \dots u_n$, on peut supposer que $x_1, x_2, \dots x_n$ ont des valeurs quelconques et sont des variables indépendantes.

Donc $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ admet comme facteur

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

2. — Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} & & & & \alpha_1 \\ & & & & \alpha_2 \\ & \Delta & & & \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{K}.$$

Désignons par $\mathrm{K}a_{ik}$, $\mathrm{K}\alpha_i$ les mineurs de ce déterminant, coefficients des éléments a_{ik}, α_i quand on développe K par rapport aux éléments d'une ligne ou d'une colonne contenant a_{ik} ou α_i. Si nous développons la forme $\Phi(u_1, u_2, \dots u_n)$ nous verrons que les coefficients de cette forme sont les $\mathrm{K}a_{ik}$. Pour que cette forme soit identiquement nulle, il faut et il suffit que l'on ait $\mathrm{K}a_{ik} = 0$. Ainsi, si la forme quadratique $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ est décomposable en un produit de deux facteurs linéaires, on a $\mathrm{K}a_{ik} = 0$. Je dis qu'on a aussi $\mathrm{K}\alpha_i = 0$, si α_i est différent de zéro. Soit, en effet, K' l'adjoint de K, on a $\mathrm{K}' = \mathrm{K}^n$. Or, si l'on développe K' par rapport aux éléments de la dernière ligne lesquels sont $\mathrm{K}\alpha_1$, $\mathrm{K}\alpha_2$, ... $\mathrm{K}\alpha_n$, Δ, les coefficients de ces éléments sont nuls, puisque $\mathrm{K}a_{ik} = 0$. Donc on aura $\mathrm{K}' = 0$ et, par suite, aussi $\mathrm{K} = 0$.

Si, maintenant, nous développons K par rapport aux éléments de la ligne de rang i, ce développement se réduira a $\alpha_i \mathrm{K}\alpha_i$ à cause de $\mathrm{K}a_{ik} = 0$. Si l'on suppose α_i différent de zéro, on aura donc $\mathrm{K}\alpha_i = 0$.

Dans un déterminant tel que K, convenons d'appeler *mineur principal d'ordre* p, un mineur de K, d'ordre p, obtenu par la suppression de $n + 1 - p$ lignes dans K et de $n + 1 - p$ colonnes de même rang que les lignes. Il sera, comme K, un déterminant symétrique.

Théorème. — *La forme quadratique* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *étant décomposable en un produit de deux facteurs linéaires, les mineurs principaux de* K, *du quatrième ordre, obtenus par la suppression, dans* K, *de lignes et de colonnes de même rang, à l'exception de la dernière ligne et de la dernière colonne, sont tous nuls, et ils ont tous leurs mineurs nuls.*

D'abord, le théorème fondamental n'est applicable que si la forme $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ renferme au moins trois variables; car si elle en renfermait moins de trois, la forme $\Phi(u_1, u_2, u_n)$ deviendrait illusoire, puisqu'elle serait indépendante des coefficients de la forme donnée. D'après cela, le déterminant K sera au moins du quatrième ordre, et ses mineurs qui doivent être tous nuls, au moins du troisième ordre.

La forme $f(x_1, x_2, x_n)$ étant, par hypothèse, décomposable en un produit de deux facteurs linéaires, annulons toutes les variables, moins trois d'entre elles; nous obtiendrons une nouvelle forme, également décomposable en un produit de deux facteurs linéaires, et dont le déterminant K sera précisément un des mineurs principaux déduit du déterminant K de la forme primitive, d'après la règle contenue dans l'énoncé du théorème. Donc ce mineur sera nul; par suite, tous ses mineurs sont nuls, d'après le théorème fondamental.

(A suivre.)

UN DEVOIR D'ÉLÈVE

(*Suite*, voir. p. 56.)

Nous allons maintenant supposer que les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ soient égales entre elles; nous aurons alors, en les désignant par x',

$$Y = \pm \sqrt{\frac{a(x - x')^2}{x - d}};$$

ceci me fait voir que je ne pourrai donner à x des valeurs plus petites que d; donc $x = d$ est une limite à gauche. Maintenant nous pouvons faire deux hypothèses

$$x' > d, \quad x' < d.$$

Dans le premier cas, les valeurs qui étaient infinies pour

$x = d$ diminueront constamment à mesure que x approchera de x' ; elles seront nulles pour cette valeur et recroîtrons ensuite indéfiniment si l'on donne à x des valeurs depuis x jusqu'à ∞. Nous pouvons donc tracer la courbe auxiliaire, qui se composera des deux parties HAH′ et KAK′, (*fig. 18*) et parsuite la courbe définitive qui se composera de trois parties ou branches infinies.

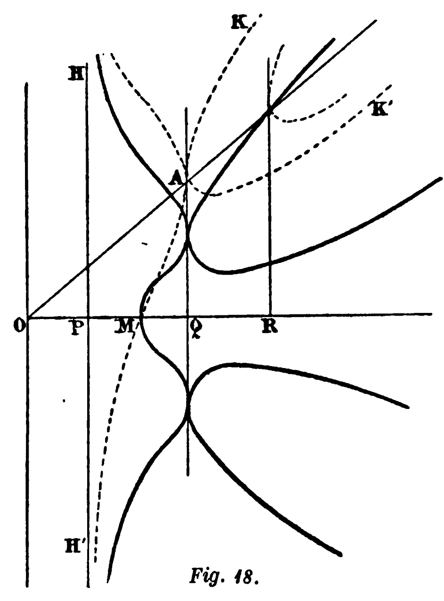


Fig. 18.

La courbe pourrait varier de forme si AK′, branche de courbe auxiliaire coupait l'axe des x, cela

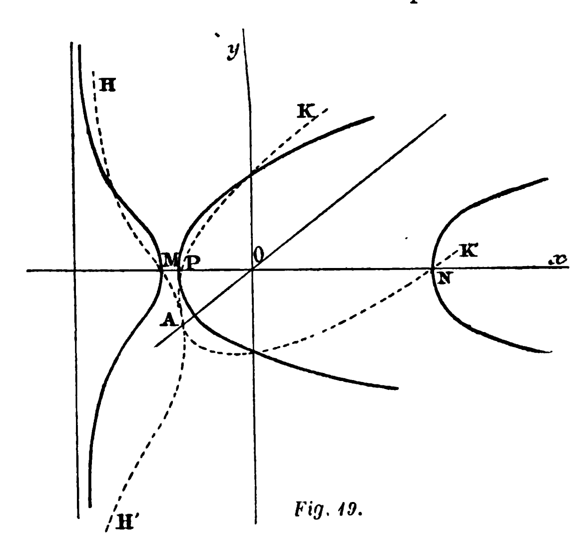


Fig. 19.

donnerait naissance à une autre branche comme l'indique la *fig. 19.*

Supposons maintenant que l'on ait $x' < d$. On ne pourra, comme précédemment, donner à x des valeurs plus petites que d pour $x = d$, on aura $Y = \infty$; à mesure que x croîtra, on aura pour Y des valeurs décroissantes; mais qui croîtraient au bout d'un certain temps pour être infinies en même temps que x. Il y a donc un minimum de Y facile à déterminer en prenant la dérivée de Y et l'égalant à o. En supposant ce minimum connu décrivons la courbe auxiliaire

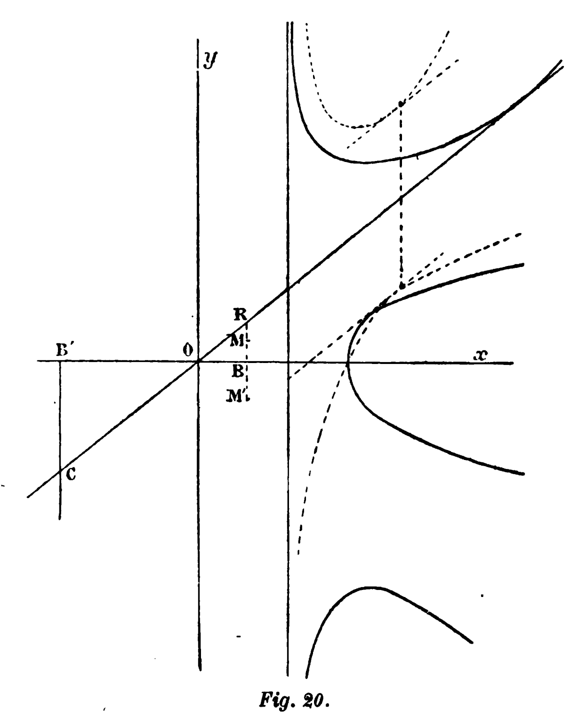


Fig. 20.

et par suite celle à chercher. Mais, si on fait $x = x'$, on a $Y = o$, ce qui donne le point R ou le point C, suivant que $x' >< o$: dans le premier cas *(fig. 20)* on a les deux points singuliers M, M'; dans le second ils disparaissent.

On conçoit que la courbe pourrait varier si la racine était

négative et suffisamment grande, nous aurions alors la forme suivante (*fig.* 21), qui s'approcherait assez de la forme que l'on obtient en posant $x' > d$.

Reste enfin, en supposant toujours $a > o$, à voir le cas où

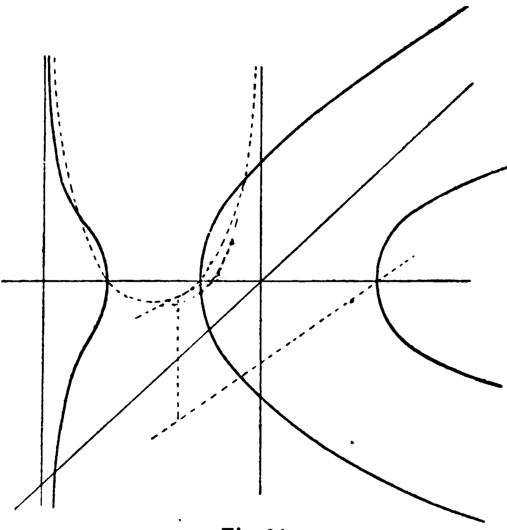


Fig. 21.

les valeurs de x sont imaginaires; dans ce cas, la valeur de Y peut s'écrire $\quad Y = \pm\sqrt{\frac{a[(x-d)^2+\beta^2]}{x-d}};$

on ne pourra donner à x des valeurs plus petites que d, limite pour les abscisses, à gauche; en faisant $x = d$ on aura $Y = \infty$; à mesure que x augmentera, la valeur de Y diminuera d'abord pour augmenter ensuite et devenir infinie en même temps que x; on voit que l'on obtiendra ainsi deux formes analogues aux deux précédentes, si ce n'est qu'il n'y aura pas de points singuliers. La valeur de Y aura aussi un minimum que l'on déterminerait par le même moyen.

Nous allons maintenant passer à l'hypothèse $a < o$, en supposant d'abord que les racines soient réelles ou que $b^2 - 4ac > o$; nous supposerons aussi que $d < x' < x''$, x', x'' étant les racines de $ax^2 + bx + c = o$. La valeur de Y peut s'écrire

$$Y = \sqrt{\frac{-a'(x - x')(x - x'')}{x - d}},$$

a' étant positif et égal à $-a$.

Pour toutes les valeurs de x plus petites que d, les trois différences binômes seront négatives, donc la valeur de Y sera réelle; si on fait $x = -\infty$, on aura $Y = \pm\infty$; et si on fait augmenter x, on aura des valeurs de Y qui diminueront pour augmenter ensuite et devenir infinies pour $x=d$, dans cet intervalle la valeur de Y est donc susceptible d'un minimum. On ne pourra maintenant faire croître x depuis d jusqu'à x', les valeurs de Y seraient imaginaires; mais on pourra les faire croître depuis $x = x'$, ce qui donne $Y = 0$

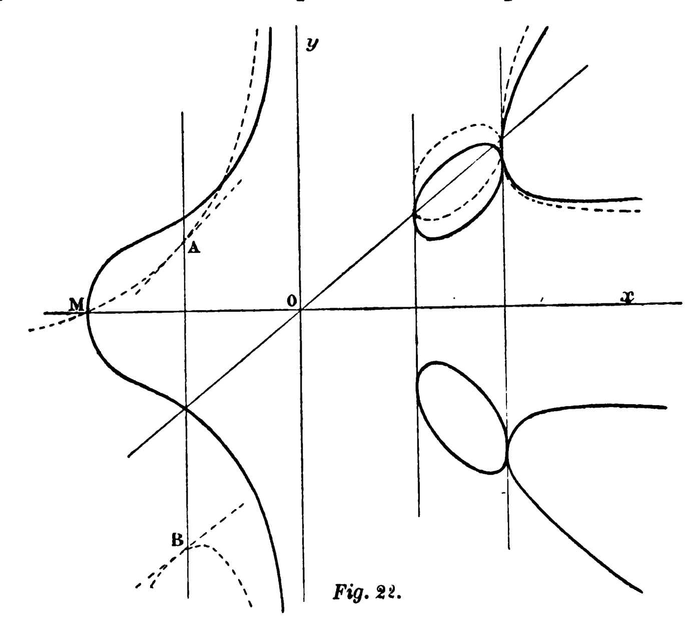


Fig. 22.

jusqu'à $x = x''$, ce qui donne $Y = 0$. Nous pouvons donc décrire la courbe auxiliaire et celle que nous cherchons.

Dans ce genre, tombe la courbe

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{-x^2 + 3x - 2}{x}};$$

nous allons la construire. Cherchons le minimum de Y, ce sera en posant

$$Yx^2 + x^2 - 3x + 2 = 0, \quad \text{ou} \quad x^3 - 13x^2 - 22x + 9 = 0$$

et cherchons la racine négative qui satisfait à cette équation; elle tombe entre -1 et -2. La valeur de Y correspondante sera à peu près $\sqrt{6}$. Les deux points minimums seront donc A, B (*fig.22*); et la partie à gauche de la courbe auxiliaire sera tracée; supposons $x = 2$, on aura $Y = 0$ et les résultats croîtront depuis o jusqu'à $+\infty$; on aura donc une partie fermée à droite. Voyons si elle coupe l'axe des x, pour cela nous poserons

$$x = \sqrt{\frac{-x^2 + 3x - 2}{x}}, \quad \text{ou} \quad x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0,$$

équation dans laquelle 2 est limite ; par suite la branche de

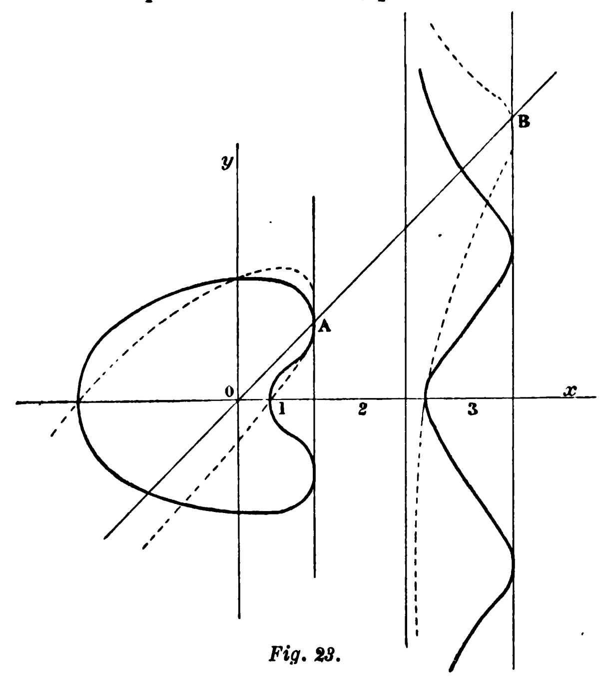


Fig. 23.

droite ne coupe pas l'axe des x; voyons si la courbe de gauche le coupe; pour cela, changeons x en $-x$; d'où

$$x^3 - x^2 - 3x - 2 = 0,$$

équation qui a une racine comprise entre 2 et 3, qui me donne le point M, à l'aide de cela je pourrai construire la courbe cherchée.

Si nous rentrons dans le cas général, il y aura plusieurs formes de courbes, qui dépendent des signes des racines.

Supposons, par exemple, que l'une des racines x' soit négative, alors les deux courbes fermées n'en feront plus qu'une et on aura la forme indiquée *(fig. 23)*.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

---

206. — *Lieu géométrique des points* M *tels que les droites qui leur sont harmoniquement associées soient perpendiculaires à* OM *(*O *centre du cercle circonscrit).*

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées normales d'un point du lieu. On a :

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 0.$$

l'équation de OM est :

$$\sum x\,(y_1 \cos C - z_1 \cos B) = 0.$$

La condition de perpendicularité de ces droites est :

$$\sum \frac{y_1 \cos C - z_1 \cos B}{x_1} - \sum \frac{\cos A}{y_1 z_1}(z_1 \cos B - y_1 \cos C) = 0$$

ou, en supprimant les indices

$$\sum \frac{x}{a}(y^2 - z^2) = 0,$$

équation cubique des inverses, relative au centre de gravité, ou *cubique des dix-sept points.*

207. — *Résoudre la question posée dans l'exercice précédent en remplaçant* O *par un point quelconque* P (x_2, y_2, z_2).

On trouve de là, l'equation

$$\sum x[z^2(y_2 \cos C + x_2) - y^2(z_2 \cos B + x_2)] = 0$$

qui ne rentre dans la catégorie des cubiques des inverses relatives à un point donné que si le point O est pris pour représenter P.

208. — *Lieu du point* M, *tel que la droite qui lui est harmoniquement associée soit parallèle à* MP, P *étant un point fixe* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

On trouve, en coordonnées barycentriques,

$$\sum \alpha(\beta^2\gamma_1 + \gamma^2\beta_1) - 2\alpha\beta\gamma(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 0$$

équation d'une cubique circonscrite à ABC.

209. — *Soient* M, M_2 *deux points inverses de la cubique des inverses relative au point* P; *les droites harmoniquement associées à* M_1 *et* M_2, *se coupent en un point situé sur la droite transversale inverse de celle qui est harmoniquement associée à* P.

Les droites (M) (M_2) ont pour équations :

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0,$$
$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 0,$$

elles se coupent au point déterminé par

$$\frac{x}{x_1(y_1^2 - z_1^2)} = \frac{z}{z_1(x_1^2 - y_1^2)} = \frac{y}{y_1(z_1^2 - x_1^2)}.$$

Les coordonnées x_1, y_1, z_1, vérifiant la relation :

$$\sum \lambda x_1(y_1^2 - z_1^2) = 0,$$

on a

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0.$$

210. — *Si* M, M_0 *sont deux points réciproques de la cubique des réciproques relative au point* P, *les droites harmoniquement associées à* M. M_0 *se coupent sur la droite harmoniquement associée au réciproque de* P.

La transformation homographique instantanée, de M. de Longchamps, permet de déduire immédiatement cette proposition de la précédente.

211. — *Soient :* M *un point*, μ *la droite qui lui est harmoniquement associée*, μ_2 *la transversale inverse de* μ, *le lieu des points* M, *tels que* μ, μ_2 *soient parallèles est la cubique des inverses relative au point de Lemoine :*

$$\Sigma ax(y^2 - z^2) = 0.$$

212. — *Dans les conditions de l'exercice* 211, *trouver le lieu des points* M *tels que* μ, μ_2 *soient perpendiculaires.*

On trouve :

$$3xyz - \Sigma\, x \cos A(y^2 + z^2) = 0,$$

équation d'une cubique qui est sa propre transformée par points inverses; elle est circonscrite au triangle et passe par les pieds des hauteurs.

213. — *Quand une conique est circonscrite à un triangle* ABC, *les tangentes à cette conique, en* A, B, C, *forment un triangle* $A_1B_1C_1$ *homologique avec le premier.*

Soit la conique :

$$\frac{x_1}{x} + \frac{y_1}{y} + \frac{z_1}{z} = 0.$$

les tangentes en A, B, C, sont :

$$\frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 0 \ldots$$

et les droites AA_1, BB_1, CC_1 ont pour équations :

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}, \ldots$$

qui se coupent au point: $\dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y}{y_1} = \dfrac{z}{z_1}$,

centre d'homologie des triangles considérés.

L'axe d'homologie est la droite:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 0,$$

harmoniquement associée au centre d'homologie. On sait que la condition exprimant que les normales en A, B, C à la conique considérée sont concourantes, est

$$\sum \frac{x_1}{a}(y_1^2 - z_1^2) = 0.$$

Elle prouve que ces normales sont concourantes quand le point K_1, dont les coordonnées normales sont x_1, y_1, z_1 (qu'on pourrait appeler point de Lemoine de la conique circonscrite) décrit la cubique des inverses relative au centre de gravité, ou *cubique des dix-sept points.*

On peut remarquer que, d'après l'exercice 206, la même condition exprime que l'axe d'homologie est perpendiculaire à la droite OK_1.

EXERCICE ÉCRIT

54. — On donne une parabole P, rapportée à ses axes. Soient: M un point mobile, pris sur P; MA l'ordonnée correspondante.

Il existe une parabole P′ passant par A, tangentiellement à *ox*, et par M, tangentiellement à P.

1° Démontrer que P′ touche *oy* et que le point de contact B est tel que

$$OB = \frac{MA}{4}.$$

La parallèle à l'axe menée par B rencontre MA en un point C qui décrit donc une parabole, quand M est mobile sur P. Donner l'équation de cette parabole.

2° Lieu des foyers des paraboles P′ (ce lieu est une cissoïde).

3° Si l'on projette M en B′ sur oy, il existe une parabole P″ touchant les axes aux points A, B′. P″ et P′, abstraction faite de A, se coupent en deux points C, D.

CD et la tangente en M se coupent en un point dont on demande le lieu géométrique.

4° On imagine une parabole Q quelconque, tangente aux axes ox, oy.

Etudier l'intersection des paraboles P, Q. Montrer que l'équation en λ, correspondant à ces paraboles, se décompose, rationnellement, en deux facteurs.

La parabole Q admet deux normales parallèles aux axes; ces normales se coupent en un point R.

Trouver quelle position doit occuper le point R pour que les points communs aux paraboles P, Q soient réels, imaginaires ou coïncidents.

5° Trouver le lieu d'un point I d'où partent deux droites rectangulaires tangentes, l'une à P, l'autre à Q.

Construire la courbe, lieu du point I, en supposant que Q touche les axes en des points A, B tels que

$$OA = \frac{p}{2}, \qquad OB = \frac{p}{4}.$$

Note sur l'exercice 53.

En suivant la méthode classique pour trouver le lieu des foyers dans un réseau de coniques, l'exercice proposé conduit à l'identité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\left(\mu^2 + \frac{a^2}{b^2}\right) - 2\mu\frac{y}{b} + \frac{\lambda}{b^2}\left[(x-\alpha)^2 + (y-b)^2\right] \equiv \textit{Carré parfait.}$$

Comme il n'y a pas de terme en xy, le premier membre est le carré parfait d'un trinôme en x, ou d'un trinôme en y. La première hypothèse conduit au lieu cherché. On a

$$\lambda + \mu^2 + \frac{a^2}{b^2} = 0, \qquad \mu + \lambda\frac{\beta}{b} = 0.$$

$$(1 + \lambda)(\lambda\alpha^2 + \lambda\beta^2 - c^2) = \lambda^2\alpha^2.$$

En éliminant λ, μ on trouve

$$x^2 + y^2 - c^2 = \pm x\frac{a^2 + c^2}{a}.$$

Le lieu se compose d'un système de deux cercles symétriques l'un de l'autre par rapport à oy. Si l'on considère une extrémité du grand axe A, et le centre de courbure A′, correspondant, l'un des cercles trouvé est celui qui est décrit sur AA′ comme diamètre.

QUESTIONS D'EXAMENS

1. — *On donne une quadrique* Q *et un point fixe* $M_0(x_0y_0z_0)$; *par* M_0 *on fait passer une droite* Δ_1 *qui coupe* Q *aux points* A_1, B_1.

Démontrer que si l'on prend trois droites rectangulaires Δ_1, Δ_2, Δ_3, *de directions variables, passant par* M_0, *la somme :*

$$U = \frac{1}{M_0A_1.M_0B_1} + \frac{1}{M_0A_2.M_0B_2} + \frac{1}{M_0A_3.M_0B_3}$$

est invariable.

En posant

$$x = x_0 + \alpha_1\rho, \qquad y = y_0 + \beta_1\rho, \qquad z = z_0 + \gamma_1\rho,$$

on a (le point x, y, z, étant sur Q)

$$f_0 + \rho(\alpha_1 f'x_0 + \ldots) + \rho^2\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{M_0A_1.M_0B_1} = \frac{\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{f_0}.$$

En appliquant cette relation aux droites $M_0A_1B_1$, $M_0A_2B_2$, $M_0A_3B_3$ et en tenant compte des relations qui expriment que ces droites sont rectangulaires, on a (notation habituelle),

$$U = \frac{A + A' + A''}{f_0}.$$

Lorsque M_0 est placé au centre de la quadrique, on retrouve une propriété très connue.

2. — *Deux quadriques qui sont homothétiques se coupent suivant une conique à distance finie; la partie complémentaire de l'intersection étant rejetée à l'infini.*

La réciproque est-elle vraie?

En considérant les deux cylindres hyperboliques représentés par les équations *(Notation abrégée)*,

$$PQ = h, \qquad PR = h';$$

on voit que l'intersection, abstraction faite des points à l'infini, est une hyperbole située dans le plan correspondant à l'équation

$$Qh' - Rh = 0.$$

Les cylindres considérés ne sont pas homothétiques (Q, R étant des formes linéaires quelconques) ; la réciproque en question n'est donc pas exacte.

3. — *Trouver le lieu des milieux des cordes, parallèles à la direction* (α, β, γ), *dans la surface représentée par l'équation*

$$xyz = a^3.$$

Les formules classiques, employées dans l'exercice 1, donnent

$$\alpha\beta\gamma\rho^3 + \rho^2\sum\alpha\beta z_0 + \rho\sum x_0 y_0 \gamma + x_0 y_0 z_0 - a^3 = 0.$$

Cette équation admet deux racines égales et de signes contraires, si l'on a

$$\alpha\beta\gamma(x_0 y_0 z_0 - a^3) = \sum\alpha\beta z_0 \sum x_0 y_0 \gamma.$$

En rendant $x_0 y_0 z_0$ coordonnées courantes, on obtient une équation qui peut se mettre sous la forme

$$1 - \frac{a^3}{xyz} = \sum\frac{x}{\alpha}\sum\frac{\alpha}{x}.$$

L'identité manifeste

$$(u+v+w)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right) - 1 = \frac{(u+v)(v+w)(w+u)}{uvw},$$

prouve que l'équation du lieu est

$$\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}\right)\left(\frac{z}{\gamma}+\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{a^3}{\alpha\beta\gamma}.$$

En prenant, pour nouveaux plans de coordonnées, ceux qui correspondent aux équations

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta} = 0, \quad \frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma} = 0, \quad \frac{z}{\gamma}+\frac{x}{\alpha} = 0,$$

et qui constituent un véritable trièdre. On voit que, dans le nouveau système, la surface trouvée sera représentée par l'équation

$$XYZ = m^3.$$

Le lieu est une surface *du même genre* que la surface donnée.

QUESTION 304

Solution par M. H. Brocard.

On considère une kreuzcurve et une ellipse ayant mêmes axes que la kreuzcurve et la touchant en un point M *; démontrer que le rayon de courbure de la kreuzcurve, en* M, *est le tiers du rayon de courbure de l'ellipse, au même point.* (Balitrand.)

Le centre de courbure K au point M de l'ellipse se trouve sur la parallèle au petit axe OB, menée par l'intersection D du diamètre OM aboutissant au point donné M avec la parallèle ND à la tangente menée par le point N où la normale rencontre l'axe focal AOA'.

Plus généralement, si l'on considère les courbes représentées par l'équation

(1) $$Ax^{m+1} + By^{m+1} = 1,$$

et si on leur applique la même construction, on reconnaîtra que le rayon de courbure est, au signe près, m fois le segment MK ainsi obtenu.

Si, en effet, on élimine A et B entre l'équation (1) et ses deux premières dérivées, on trouve

$$p'xy + m(p^2x - py) = 0,$$

p et p' désignant $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$.

La projection du rayon de courbure, sur OX, a pour expression

$$\frac{p(1 + p^2)}{p}.$$

D'autre part, la différence des abscisses des points M_1, D_1 a pour valeur

$$x - \frac{px(x + py)}{px - y} = \frac{(1 + p^2)xy}{y - px}.$$

Mais l'équation (1) peut s'écrire :

$$mp\,\frac{1 + p^2}{p'} = \frac{(1 + p^2)xy}{y - px}.$$

La propriété énoncée est donc établie.

Il reste à remarquer que, parmi les courbes de cette famille, on peut signaler : l'ellipse ($m = 1$); le cercle ($m = 1$); la développée de l'ellipse $\left(m = -\frac{1}{3}\right)$; l'hypocycloïde à quatre rebroussements $\left(m = -\frac{1}{3}\right)$; la kreuzcurve ($m = -3$); une kreuzcurve lieu du foyer d'une parabole invariable roulant dans un angle droit ($m = -3$); etc.

QUESTIONS PROPOSÉES

341. — Décrire une circonférence passant par un point donné et bi-tangente à une conique donnée. *(A. Tissot.)*

342. — k étant un nombre entier, le coefficient de x^k, dans le développement de $\frac{(1 + x)^{2k+2}(1 - x)}{1 + x^3}$, est 3^k. *(Nouvelles Notes d'Algèbre et d'Analyse.)* *(E. Catalan.)*

343. — D'un point P du plan d'une ellipse, on abaisse les quatre normales à l'ellipse dont les pieds sont A, B, C, D. Montrer que le lieu des points tels que le foyer F et le symétrique P' de P par rapport au centre soient sur une même conique que les pieds A, B, C, D, est une ellipse (E). Cette ellipse (E) est semblable à l'ellipse donnée ; elle a son centre au second foyer F' de l'ellipse donnée et elle passe par les sommets du petit axe de cette ellipse. *(Barisien.)*

344. — Soit $\varphi(x, y, z)$ l'ensemble des termes du second degré dans le premier membre de l'équation d'un hyperboloïde à une nappe. Si l'on désigne par H le discriminant de ce premier membre, rendu homogène ; par γ, γ', γ'' et Δ les mineurs de H qui correspondent respectivement aux demi-coefficients de x, y, z dans les termes du premier degré et au terme constant; enfin par λ, μ, ν trois paramètres assujettis seulement à la condition $\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0$; les projections, sur les plans coordonnés, des génératrices de la surface appartenant à l'un des deux systèmes auront pour équations :

$$\Delta(\nu y - \mu z) + \mu\gamma'' - \nu\gamma' + \frac{1}{2}\sqrt{H}\ \varphi'_\lambda = 0,$$

$$\Delta(\lambda z - \nu x) + \nu\gamma - \lambda\gamma'' + \frac{1}{2}\sqrt{H}\ \varphi'_\mu = 0,$$

$$\Delta(\mu x - \lambda y) + \lambda\gamma' - \mu\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{H}\ \varphi'_\nu = 0.$$

En changeant, dans ces équations, le signe de $\sqrt{H}$, on obtiendra celles qui se rapportent à l'autre système de génératrices. *(A. Tissot.)*

345. — Trois points de masses m_1, m_2, m_3, se meuvent sur les côtés d'un triangle ABC, de façon à rester en ligne droite; trouver le lieu du centre de gravité de ces trois points.

(Balitrand.)

346. — Quelle est, parmi les normales à une cardioïde donnée, celle qui est la plus éloignée du point de rebroussement de cette courbe?

Généralisation. — Étant donnée la courbe, représentée par l'équation

$$\rho = a \cos^n \frac{\omega}{n}$$

en coordonnnées polaires, déterminer quelle est, parmi les normales à cette courbe, celle qui est la plus éloignée du pôle? (*Svéchnicoff*, à Troïtzk.)

347. — Soit $f(x, y) = o$, l'équation d'une conique Γ rapportée à deux axes rectangulaires ox, oy.

On considère une autre origine fixe O_1 et deux nouveaux axes : l'un, O_1X parallèle à ox; l'autre, O_1Y *mobile*.

Trouver le lieu du centre de la conique Γ' qui, dans ce nouveau système, est représentée par l'équation

$$f(X, Y) = o.$$

2° En supposant que Γ admette ox pour axe de symétrie ; trouver l'enveloppe des coniques Γ'. (*Em. Lemoine.*)

348. — On considère une hyperbole H; par le centre O de cette courbe, on mène des perpendiculaires δ, δ', aux asymptotes Δ, Δ' et l'on obtient, sur H, quatre points A, B, C, D formant un rectangle. Soit Γ la circonférence circonscrite à ce rectangle. Par un point M, arbitrairement choisi sur H, on mène des tangentes MP, MQ, à Γ.

1° OP, OQ forment, avec les droites δ, δ', un faisceau harmonique.

2° Parallèlement à l'une des asymptotes Δ, on trace une transversale; elle coupe Γ, H et δ' en quatre points formant une division harmonique. (*G. L.*)

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 6560-3-92.

NOTE SUR UNE ÉQUATION
ANALOGUE A L'ÉQUATION EN S

Par M. **Humbert**, professeur de mathématiques spéciales
au Lycée Janson de Sailly.

Etant donnée une conique

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

l'équation en S, relative à cette conique, est

$$(a - S)(c - S) - b^2 \equiv S^2 - (a + c)S + ac - b^2 = 0.$$

On sait que le discriminant de cette équation est une somme de deux carrés, $(a - c)^2 + 4b^2$, et que la condition pour que les deux valeurs de S soient égales, $2b = \pm i(a - c)$, exprime que l'une des deux directions asymptotiques est isotrope. Le cercle est un cas particulier, qui se présente, seul, quand les coefficients de l'équation de la conique sont supposés réels.

Cela posé, considérons une section plane centrale d'une surface du second degré à centre; d'un ellipsoïde, par exemple, la section faite dans la surface $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, par le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. On sait que les longueurs des axes de cette section sont données par l'équation du second degré

$$(1) \qquad \frac{a^2\alpha^2}{a^2 - \rho^2} + \frac{b^2\beta^2}{b^2 - \rho^2} + \frac{c^2\gamma^2}{c^2 - \rho^2} = 0, \qquad \text{ou}$$

$$\rho^4(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2) - \rho^2[a^2(b^2 + c^2)\alpha^2 + b^2(a^2 + c^2)\beta^2 + c^2(a^2 + b^2)\gamma^2] + a^2b^2c^2(\alpha^2\beta^2\gamma^2) = 0.$$

La condition pour que cette équaation ait une racine double est donnée par l'équation

$$[a^2(b^2 + c^2)\alpha^2 + b^2(c^2 + a^2)\beta^2 + c^2(a^2 + b^2)\gamma^2]^2 - 4a^2b^2c^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2) = 0.$$

C'est une forme quadratique en $a^2\alpha^2$, $b^2\beta^2$, $c^2\gamma^2$ qui peut s'écrire ainsi :

$$a^4(b^2-c^2)^2\alpha^4+b^4(c^2-a^2)^2\beta^4+c^4(a^2-b^2)^2\gamma^4$$
$$-2(a^2-b^2)(c^2-a^2)\;b^2c^2\gamma^2\beta^2-2(b^2-c^2)(a^2-b^2)a^2c^2\alpha^2\gamma^2$$
$$-2(c^2-a^2)(b^2-c^2)\;a^2b^2\alpha^2\beta^2=0,$$

ou bien, en désignant par u, v, w, les quantités positives.

$$a^2\alpha^2(b^2-c^2),\ b^2\beta^2(a^2-c^2),\ c^2\gamma^2(a^2-b^2),$$
$$u^2+v^2+w^2+2vw-2uw+2uv=0,$$

On peut mettre, de deux façons, le premier membre sous forme d'une somme de deux carrés,

$$(u+v-w)^2+4vw=0 \quad , \quad (-u+v+w)^2+4uv=0.$$

— Si l'on ne suppose pas α, β, γ réels, cette équation exprime que le plan coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse dont l'une des directions asymptotiques est direction isotrope (voir ce qui a été rappelé au début). Si l'on suppose α, β, γ réels, on a la solution $v=0$, $u=w$, c'est-à-dire un couple de plans

$$a^2\alpha^2\,(b^2-c^2)-c^2\gamma^2\,(a^2-b^2)=0, \qquad \beta=0.$$

Ces plans coupent la surface suivant des cercles; ce sont les plans cycliques réels.

— Si l'on ne fait pas cette hypothèse, le premier membre de la relation peut se mettre sous forme d'un produit de quatre facteurs linéaires. Il suffit, pour le voir, de poser pour un instant

$$u=X^2, \qquad v=Y^2, \qquad w=Z^2;$$

on a
$$(X^2+Y^2-Z^2)^2+4Y^2Z^2=0,$$

c'est-à-dire

$$(X^2+Y^2-Z^2+2iYZ)(X^2+Y^2-Z^2-2iYZ)=0,$$

ou
$$[X^2+(Y+iZ)^2][X^2+(Y-iZ)^2]=0.$$

Finalement

$$(X+iY-Z)(X-iY+Z)(X+iY+Z)(X-iY-Z)=0.$$

Chacune de ces équations exprime que le plan considéré tourne autour d'une droite, celle qui joint l'origine à l'un des points du plan de l'infini, ayant pour coordonnées

$$a\sqrt{b^2-c^2}, \quad \pm\, ib\sqrt{a^2-c^2}, \quad \pm\, c\sqrt{a^2-b^2}, \quad 0.$$

Ces points sont justement les points de rencontre de l'ellipsoïde avec le cercle de l'infini.

SUR LES PODAIRES
ET SUR LES COURBES POLAIRES RÉCIPROQUES

Par M. **X. Antomari**, professeur au Lycée Henri IV.

Considérons une courbe (C) *(fig. 1)* et un point fixe O de son plan. Soit OI la perpendiculaire abaissée, du point O, sur la tangente en un point quelconque A de la courbe (C); le point I sera un point de la podaire de cette courbe par rapport au point O. Du point O comme centre décrivons un cercle de rayon R et soit I′ le conjugué harmonique du point I par rapport à ce cercle, c'est-à-dire le pôle de la droite AI. Lorsque le point A se déplace sur la courbe (C) le point I′ décrit, comme on sait, la courbe polaire réciproque de (C) par rapport au cercle considéré, de centre O. D'un autre côté, la relation bien connue

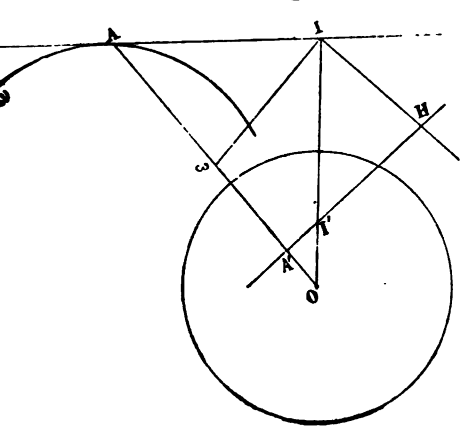


Fig. 1.

$$OI' \times OI = R^2$$

montre que les courbes décrites par les points I et I′ sont inverses l'une de l'autre par rapport au point O, la puissance d'inversion étant égale à R^2. De là résulte la proposition suivante:

Toute podaire d'une courbe (C) *est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la courbe polaire réciproque de* (C) *par rapport à un cercle quelconque décrit du pôle comme centre.*

Menons, du point I′, la perpendiculaire I′A′ sur OA : cette droite est évidemment la polaire du point A et par suite la



tangente en I′ à la polaire réciproque de (C). Il en résulte que le point A′ est un point de la podaire de cette polaire réciproque. D'ailleurs

$$OA' \times OA = OI' \times OI = R^2,$$

donc :

Si l'on considère une courbe (C′) *et sa polaire réciproque* (C′) *par rapport à un cercle* O, *de rayon* R, *chacune d'elles est l'inverse de la podaire de l'autre par rapport au point* O *et avec la puissance d'inversion* R².

Nous nous proposons d'indiquer quelques conséquences de des deux propositions presque évidentes et bien connus.

I. — Soit IH la tangente en I à la podaire de (C) et soit Iω la médiane du triangle IAO. Puisque les lieux des points I et I′ sont deux courbes inverses, on a

$$\widehat{OIH} = \widehat{II'H};$$

mais, d'autre part

$$\widehat{II'H} = \widehat{IA\omega} = \widehat{AI\omega}.$$

Les deux angles AIω et I′IH sont donc égaux ; par suite, l'angle ωII′, complément du premier est aussi complément du second, donc l'angle ωIH est droit, et l'on retrouve la construction, bien connue, de la tangente aux podaires.

II. — Supposons que le lieu du point I soit une droite, alors le lieu du point I′ est un cercle passant par le point O ; mais la polaire réciproque de ce cercle est une parabole donc :

La courbe qui a pour podaire une droite est une parabole ayant pour foyer le pôle.

III. — Si le lieu du point I est un cercle ne passant pas par le pôle, le lieu du point I′ est un autre cercle ; or, la polaire réciproque d'un cercle, par rapport à un cercle de centre O, est une conique ayant pour foyer le point O, donc :

La courbe qui a pour podaire un cercle est une conique.

On voit, du reste, d'après les propriétés des polaires réciproques, que la courbe sera une ellipse si le point O est intérieur au cercle lieu de I′, et une hyperbole dans le cas contraire.

IV. — Quand le lieu du point I′ est une conique : le lieu de I sera une transformée de cette conique par rayons vecteurs



réciproques; mais le lieu du point A est la polaire réciproque du lieu décrit par I′, donc :

La transformée, par rayons vecteurs réciproques, d'une conique, est la podaire d'une autre conique.

V. — En général, le lieu de I′ est une courbe de degré *m*, la courbe polaire réciproque, lieu de A, sera de classe *m*, donc :

La courbe inverse d'une courbe de degré m *est la podaire d'une courbe de la* m^me^ *classe.*

VI. — On peut définir un point quelconque A de la courbe C) par l'intersection de AI perpendiculaire à OI et de OA perpendiculaire à A′I′, donc :

Si I *et* I′ *sont deux points correspondants de deux courbes invepses par rapport à un point* O *et si l'on mène* AI *perpendiculaire à* OI *et* OA′ *perpendiculaire à la tangente en* I′ *le lieu du point de rencontre* A *de ces deux droites est une courbe dont le lieu du point* I *esl la podaire par rapport au point* O.

Cette dernière remarque se prête remarquablement bien à la démonstration de la propriété des tangentes aux sections coniques. Considérons d'abord un cercle O et une droite D *(fig. 2)*; ce sont deux courbes inverses par rapport au point F. Traçons FAB, la perpendiculaire BM à ce rayon et la perpendiculaire FA′M à la tangente en A au cercle O.

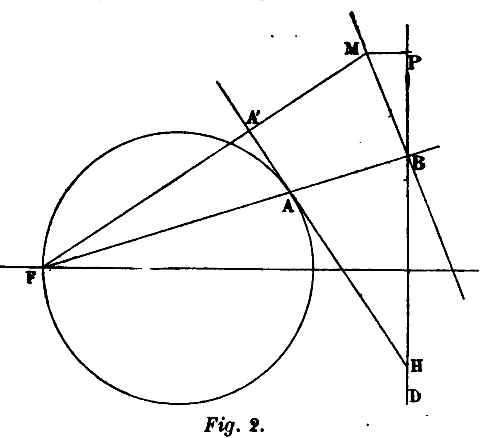


Fig. 2.

La courbe dont la podaire est une droite étant une parabole, le lieu du point M est une parabole dont la tangente en M est MB, dont F est le foyer et dont la directrice est parallèle à D. La similitude des deux triangles FAA′, FBM entraîne

alors l'égalité des angles FAA′, FMB, c'est-à-dire des angles FMB et BAH.

D'autre part, la propriété des figures inverses donne

$$\widehat{HAB} = \widehat{ABD};$$

mais les angles ABD et BMP sont égaux, comme ayant même complément MBP. De là résulte

$$\widehat{FMB} = \widehat{BMP},$$

ce qui exprime la propriété de la tangente à la parabole.

Considérons maintenant une circonférence O et un point F situé à l'intérieur de la courbe (*fig. 3*). Si l'on prend comme puissance d'inversion la puissance du point F par rapport à la circonférence O, celle-ci est à elle-même sa transformée. Ayant tracé le rayon FAB, la perpendiculaire en A à ce rayon et la tangente en B à la circonférence; la perpendiculaire FA′M à cette tangente donne un point M dont le lieu est l'ellipse qui admet le cercle O comme cercle homographique et qui a pour foyers les points F et F′ symétriques par rapport au point O. Soit F′CD le rayon parallèle à FAB; la perpendiculaire FC′ à la tangente en D doit, naturellement, passer par le point M.

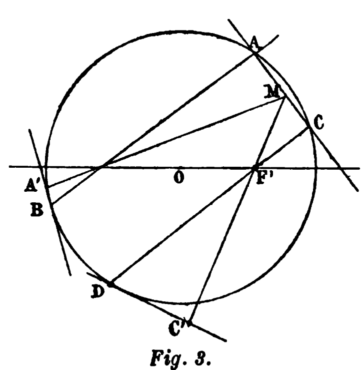


Fig. 3.

Cela posé, l'égalité évidente des angles FBA′ et F′DC′ entraîne la similitude des quatre triangles FBA′, F′DC′, F′MC et FMA. De là résulte immédiatement l'égalité des angles F′MC et FMA, c'est-à-dire la propriété de la tangente à l'ellipse.

En supposant le point F exterieur au cercle O on établirait de même, la propriété de la tangente à l'hyperbole.

SUR L'INTERSECTION DES PARABOLES

Par M. **B. Sollertinsky.**

1. — En considérant deux paraboles quelconques P, P′, dont les axes ont des directions différentes, on peut distinguer deux diamètres Δ, Δ' que nous nommons *conjugués* : ils sont tels que la tangente à l'extrémité de l'un est parallèle à l'autre.

Soient : O l'intersection de tels diamètres; S, S′ leurs extrémités; Q l'intersection des tangentes SQ, S′Q. En prenant OS, OS′ pour les axes des coordonnées, les paraboles P, P′ seront représentées par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} y^2 = 2p(x+a), \\ x^2 = 2p'(y+b), \end{cases}$$

$2p$, $2p'$ désignant les paramètres (*) relatifs aux diamètres OS, OS′, et $-a$, $-b$, étant les coordonnées de Q.

L'élimination successive de y, x, donne les équations

$$\left(\frac{x^2}{2p'} - b\right)^2 = 2p(x+a),$$

$$\left(\frac{y^2}{2p} - a\right)^2 = 2p'(y+b),$$

qui ne renferment pas de termes en x^3, y^3, quelle que soit la valeur des constantes dans les équations (1). On peut, d'après cette remarque, énoncer les propriétés suivantes :

1° *Si deux paraboles invariables* P, P′ *se meuvent dans leur plan commun, de façon que l'axe de chacune d'elles glisse sur soi-même; le centre de gravité des points communs est fixe*

2° *Les diamètres des deux paraboles circonscrites à un quadrangle* ABCD, *menés par le centre de gravité du quadrangle, sont* CONJUGUÉS *l'un à l'autre.*

3° *Quatre points* A, B, C, D *se meuvent sur une parabole fixe* P *en conservant le même centre de gravité. L'axe de l'autre parabole circonscrite au quadrangle variable* ABCD *à une direction fixe. Cette direction est encore invariable lorsque* O *se meut parallèlement à l'axe de* P.

2. — En ajoutant les équations (1) multipliées, respective-

(*) Les cordes focales conjuguées aux diamètres.

ment, par deux constantes quelconques m, n, on obtient l'équation générale de toutes les coniques passant par l'intersection des paraboles P, P′ :

$$(2)\quad n\left(x-\frac{m}{n}p\right)^2+m\left(y-\frac{n}{m}p'\right)^2=\frac{m^2p^2}{n}+\frac{n^2p'^2}{m}+2pma+2p'nb.$$

Conséquemment : *1° Si deux paraboles invariables se meuvent, chacune dans la direction de son axe, toute conique circonscrite à leur quadrangle commun* ABCD *reste concentrique et homothétique à soi même. Le lieu des centres de ces coniques est une hyperbole représentée par l'équation* $xy = pp'$, *les diamètres conjugués des paraboles étant des asymptotes. Cette hyperbole est aussi le lieu des points-milieux des six côtes du quadrangle variable.*

2° Les coniques concentriques et homothétiques rencontrent une parabole fixe aux sommets du quadrangle variable ABCD. *Son centre des moyennes distances est fixe. L'autre parabole circonscrite au quadrangle, en restant invariable, se meut dans la direction de son axe.* En effet, l'une quelconque de ces coniques étant rapportée aux diamètres conjugués des paraboles, circonscrites au quadrangle correspondant, son équation sera de la forme (2), et la variation de b reproduira tous les autres coniques.

Corollaire. — *Soient* M, N *deux points d'une parabole donnée, équidistants d'un point fixe* O. *Le milieu de* MN *décrit une hyperbole équilatère passant par* O.

3. — Faisons varier a, b de façon qu'on ait toujours

$$(3)\qquad pma + p'nb = q,$$

m, n, q étant constantes. Alors, le point Q décrit la droite (3), le milieu de SS′ décrit une parallèle à cette droite, et l'équation (2) représente une conique fixe. Donc :

1° Si deux paraboles invariables se meuvent, chacune dans la direction de son axe, de façon que le milieu de la distance SS *entre les extrémités de leurs diamètres conjugués décrive une droite, les quatre points d'intersection de ces paraboles décrivent une conique à centre.*

2° Une parabole invariable P, *se mouvant dans la direction de son axe, rencontre une conique quelconque aux sommets du quadrangle variable* ABCD, *qui conserve son centre des moyennes distances. Si cette conique n'est pas une parabole, l'autre para-*

bole P′ *circonscrite à ce quadrangle reste invariable; mais son axe glisse sur soi-même de telle manière que les tangentes à deux paraboles* ABCD, *aux extrémités de leurs diamètres conjugués, se rencontrent sur une droite fixe.*

Remarque. — En supposant les axes OS, OS′ rectangulaires, et en posant $m = n$, l'équation (2) se réduit à la suivante

$$(x - p)^2 + (y - p')^2 = p^2 + p'^2 + 2ap + 2bp',$$

laquelle représente un cercle. On pourrait ainsi reproduire et en partie compléter les propositions indiquées par M. d'Ocagne (*J. S.* 1891, p. 98). Les axes étant quelconques, en supposant $\frac{m}{n} = -1$, on obtiendrait de (2) une hyperbole équilatère, de centre $(-p, -p')$, etc.

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UNE FORME QUADRATIQUE EN UN PRODUIT DE DEUX FACTEURS LINÉAIRES

Par G. Méténier, professeur au Collège de Saint-Flour.

(*Suite*, voir. p. 79.)

I. — Application a la détermination des sécantes communes a deux coniques.

3. — Les coordonnées étant rectilignes rectangulaires ou obliques, ou trilinéaires, soit :

$$f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + 2bxy + 2cxz + 2c'yz + dz^2 = 0$$

$$f(x, y, z) = a_1x^2 + a_1'y^2 + 2b_1xy + 2c_1xz + 2c_1'yz + d_1z^2 = 0$$

les équations de deux coniques quelconques, imaginaires ou réelles, mais dans lesquelles on suppose les coefficients réels. Si l'on suppose que λ annule le discriminant de la forme $f - \lambda f_1$, l'équation $f - \lambda f_1 = 0$ représentera deux droites et sera décomposable en un produit de deux facteurs linéaires. Le théorème fondamental a, dans ce cas, une interprétation géométrique très simple. En annulant la forme quadratique (u, v, w) qui, d'après ce théorème, correspond à la forme λf_1 on a, en coordonnées tangentielles, l'équation quadratique des points de rencontre de la conique $f - \lambda f_1 = 0$ et de la droite (α, β, γ), en écrivant ici α, β et γ au lieu de α_1, α_2 et α_3.

On peut obtenir immédiatement l'équation $\varphi(u, v, w) = 0$, en éliminant x, y, z entre l'équation $f - \lambda f_1 = 0$ de la conique, l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ de la droite, et l'équation $ux + vy + wz = 0$ d'un point de rencontre de cette conique et de cette droite. Or, en écrivant que la forme $\varphi(u, v, w)$ est identiquement nulle, on écrit que les points de rencontre de la conique et de la droite sont indéterminés. Cela ne peut arriver que si la droite se confond avec la conique, et alors la conique se compose nécessairement du système de deux droites qui peuvent se confondre, et la droite (α, β, γ) est une droite du système. Formons le déterminant K et nous aurons :

$$\begin{vmatrix} a - \lambda a_1 & b - \lambda c_1 & c - \lambda c_1 & \alpha \\ b - \lambda b_1 & a' - \lambda a' & c' - \lambda c_1' & \beta \\ c - \lambda c_1 & c' - \lambda c_1' & d - \lambda d_1 & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = K.$$

Nous désignerons par A, B, C, A′, C′, D, K_α, K_β, K_γ, les mineurs de ce déterminant, *coefficients* des éléments $a - \lambda a_1$, $b - \lambda b_1$, $c - \lambda c_1$, $a' - \lambda a_1'$, $c - \lambda c_1$, $d - \lambda d_1$, α, β, γ quand on développe K par rapport aux éléments d'une ligne ou d'une colonne contenant l'élément considéré.

Nous poserons en outre

$$\begin{vmatrix} a - \lambda a_1 & b - \lambda b_1 & c - \lambda c_1 \\ b - \lambda b_1 & a' - \lambda a_1' & c' - \lambda c_1' \\ c - \lambda c_1 & c' - \lambda c_1' & d - \lambda d_1 \end{vmatrix} = \Delta(\lambda).$$

Désignons par Δ_a, Δ_b, Δ_c, $\Delta_{a'}$, ... les mineurs de ce déterminant, coefficients des éléments $a - \lambda a_1$, $b - \lambda b_1$, $c - \lambda c_1$, ... quand on développe $\Delta(\lambda)$ par rapport aux éléments d'une ligne ou d'une colonne contenant l'élément considéré.

Pour que $f - \lambda f_1 = 0$ représente le système de deux lignes droites, ou pour que la forme $f - \lambda f_1$ se décompose en un produit de deux facteurs linéaires, les conditions

(4) $A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad A' = 0, \quad C' = 0, \quad B = 0,$

qui entraînent du reste les suivantes

(5) $K = 0, \quad K_\alpha = 0, \quad K_\beta = 0, \quad K_\gamma = 0, \quad \Delta(\lambda) = 0,$

sont nécessaires et suffisantes.

En outre, si l'on développe les conditions (4), on reconnaît facilement que trois d'entre elles seulement sont distinctes, et qu'on peut remplacer l'une de ces conditions par $\Delta(\lambda) = 0$.

En résumé, il suffira de considérer les trois équations

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad \Delta(\lambda) = 0,$$

par exemple, et ces équations détermineront λ, $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$.

Désignons par H le discriminant de la forme $f(x, y, z)$ et par H' celui de la forme $f_1(x, y, z)$. En développant l'équation $\Delta(\lambda) = 0$, nous aurons :

$$(6) \qquad H'\lambda^3 - \Theta\lambda^2 + \Theta_1\lambda - H = 0.$$

Si λ est une racine de cette équation, l'équation d'une sécante commune sera :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

et α, β, γ sont données par les équations :

$$(7) \quad \begin{cases} (d - \lambda d_1)\alpha^2 - 2(c - \lambda c_1)\alpha\gamma + (a - \lambda a_1)\gamma^2 = 0, \\ (d - \lambda d_1)\beta^2 - 2(c' - \lambda c'_1)\beta\gamma + (a' - \lambda a'_1)\gamma^2 = 0. \end{cases}$$

On en tire :

$$(8) \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{c - \lambda c_1 \pm \sqrt{-\Delta_{a'}}}{d - \lambda d_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{c' - \lambda c_1 \pm \sqrt{-\Delta_a}}{d - \lambda d_1}.$$

Les radicaux ne portant pas sur une même expression, on ne pourrait savoir, d'une manière générale, comment il faut associer les signes. Mais on a les relations classiques :

$$\Delta_a\Delta_d - \Delta_c^2 = 0 \qquad \Delta_{a'}\Delta_d - \Delta_{c'}^2 = 0,$$

desquelles on tire :

$$\sqrt{-\Delta_a} = -\frac{\Delta_c}{\Delta_d}\sqrt{-\Delta_d}, \qquad \sqrt{-\Delta_{a'}} = -\frac{\Delta_{c'}}{\Delta_d}\sqrt{-\Delta_d}.$$

en convenant de prendre les déterminations positives des radicaux. Alors les formules (8) deviendront :

$$(9) \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{c - \lambda c_1 \pm \frac{\Delta_{c'}}{\Delta_d}\sqrt{-\Delta_d}}{d - \lambda d_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{c' - \lambda c_1 \pm \frac{\Delta_c}{\Delta_d}\sqrt{-\Delta_d}}{d - \lambda d_1}.$$

4. — Pour savoir comment il faut associer les signes dans les formules (9) il suffit d'écrire qu'elles satisfont à l'une des équations tirées du déterminant K, par l'application de ce qui a été dit au § 2. Nous écrirons, par exemple, que l'équation $K_\alpha = 0$ a lieu. Cette équation, développée, s'écrit :

$$\alpha\Delta_a + \beta\Delta_b + \gamma\Delta_c = 0.$$

Si l'on prend des signes contraires dans les formules (9), le résultat de la substitution sera, après avoir divisé par γ, et

en tenant compte de la relation

$$\Delta_c\Delta_b - \Delta_a\Delta_{c'} = 0;$$

$$(c - \lambda c_1)\,\Delta_a + (c' - \lambda c'_1)\,\Delta_b + (d - \lambda d_1)\Delta_c.$$

Et ce résultat est identiquement nul, d'après les propriétés, connues, des déterminants. Donc il faut prendre, dans les formules (9), des signes contraires devant les radicaux.

Si l'on suppose $d - \lambda d_1 = 0$ les équations (7) montrent qu'il y a une valeur de γ qui est nulle. Les formules (9) donneront $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{c}{c'}$ en tenant compte de $\Delta(\lambda) = 0$ qui se réduit ici, $d - \lambda d_1$ étant nul, à $(c - \lambda c_1)\,\Delta_c + (c' - \lambda c'_1)\,\Delta_{c'} = 0$. La forme quadratique $f - \lambda f_1$ admettra donc le facteur $cx + c'y$; l'autre facteur sera donné par les équations (7) où l'on fera $d - \lambda d_1 = 0$ et qu'on divisera ensuite par γ.

Les deux sécantes communes correspondant à la racine λ de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ auront donc pour équations :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[c-\lambda c_1+\frac{\Delta_{c'}}{\Delta_d}\sqrt{-\Delta_d}\right]x+\left[c'-\lambda c'_1-\frac{\Delta_c}{\Delta_d}\sqrt{-\Delta_d}\right]y \\ &\qquad + (d-\lambda d_1)z = 0, \\ &\left[c-\lambda c_1-\frac{\Delta_{c'}}{\Delta_d}\sqrt{-\Delta_d}\right]x+\left[c'-\lambda c'_1+\frac{\Delta_c}{\Delta_d}\sqrt{-\Delta_d}\right]y \\ &\qquad + (d-\lambda d_1)z = 0. \end{aligned}\right.$$

Appelons x, y, z les coordonnées des points de rencontre des sécantes d'un même couple. Pour avoir ces coordonnées il faut résoudre les équations simultanées (10). On en tire facilement :

$$(11)\qquad \frac{x}{\Delta_c} = \frac{y}{\Delta_{c'}} = \frac{z}{\Delta_d}.$$

Si nous prenons la dérivée de $\Delta(\lambda)$ nous aurons :

$$\Delta'(\lambda) = -a_1\Delta_a - a'_1\Delta_{a'} - 2b_1\Delta_b - 2c_1\Delta_c - 2c'_1\Delta_{c'} - d_1\Delta_d.$$

Dans l'équation de la conique $f_1(x, y, z) = 0$ remplaçons x, y, z par les valeurs données par les équations (11) et nous aurons $-\Delta'(\lambda)\Delta_d$. Ce résultat est nul si $\Delta'(\lambda)$ est nulle, c'est-à-dire si λ est racine double de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$. Ainsi, dans le cas où λ est racine double de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$, le couple de sécantes correspondant à son centre sur chacune des coniques correspondant aux équations

$$f = 0 \quad \text{et} \quad f_1 = 0.$$

Ce théorème a une grande importance dans la méthode de M. Darboux pour la détermination des points communs à deux coniques. *(A suivre.)*

UN DEVOIR D'ÉLÈVE

(*Suite et fin*, voir page 82).

Comme second cas, nous allons supposer que $x' < d < x''$, nous aurons toujours

$$Y = \pm \sqrt{\frac{-a'(x-x')(x-x'')}{x-d}}.$$

Pour des valeurs plus petites que x' la valeur de Y sera réelle

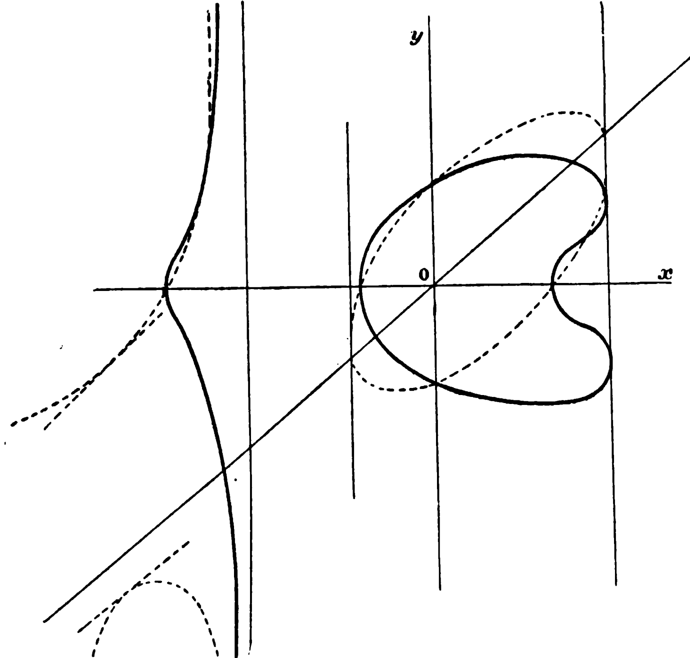


Fig. 24.

et décroîtra à mesure que x augmentera, en commençant par être égale à $\pm\infty$ quand $x = -\infty$, pour devenir nulle quand

$x = x'$. De $x = x'$ jusque $x = d$ on ne pourra donner à x des valeurs ; car les valeurs de Y seraient imaginaires : pour $x = d$ on aura $Y = \pm \infty$. A mesure que x croîtra, les valeurs de Y diminueront pour se réduire à o quand on fera $x = x''$. D'autre part on ne peut faire croître x au delà de x'', car les valeurs de Y seraient imaginaires. Donc on peut déterminer la forme de la courbe. Nous supposerons *(fig. 24)* pour construire la courbe que $a' = 1$ $x' = 1$ $x'' = 3$ $d = 2$; ce qui nous donne l'équation

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 2}}.$$

Supposons enfin que l'on ait $x' < x'' < d$. Je pourrai faire décroître x depuis $x = x'$; pour cette valeur on a $Y = 0$ jusqu'à $x = -\infty$, pour laquelle on a $Y = \pm \infty$, ce qui donne une branche à gauche infinie. Pour la courbe auxiliaire de $x = x'$ jusqu'à $x = x''$ on aura des valeurs imaginaires pour Y; enfin de $x = x''$ jusqu'à $x = d$ on aura pour Y des valeurs qui croîtront à partir de o jusqu'à $Y = \pm \infty$. On ne pourra du reste faire croître x au delà de d, car les valeurs seraient imaginaires. Nous poserons $x' = 0$, $x'' = 1$, $d = 2$, ce qui nous donne bien l'équation

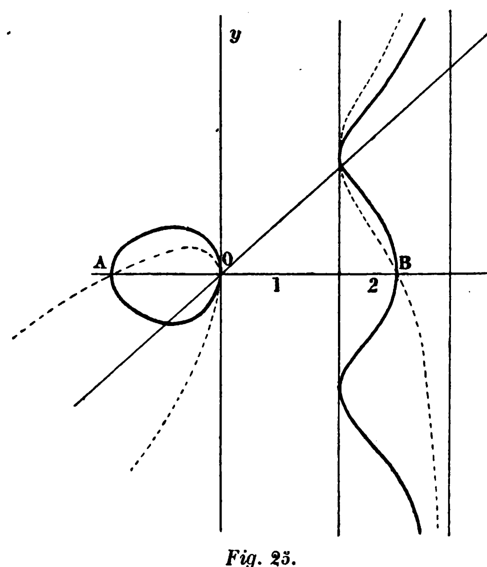


Fig. 25.

$$y^2 = x \pm \sqrt{-\frac{x^2 - x}{x - 2}},$$

à laquelle correspond la courbe de la figure 25.

Supposons maintenant que b étant $>$ o nous ayons $d < -\frac{c}{b}$, la valeur de

$$Y = \pm \sqrt{\frac{b\left(x + \frac{c}{b}\right)}{x - d}}.$$

Je pourrai donner à x des valeurs au-dessous de d, aussi petites que je voudrai, mais la valeur de Y tendra vers une limite $\pm \sqrt{b}$, qui sera une asymptote parallèle au diamètre. A mesure que x approchera de d les valeurs augmenteront

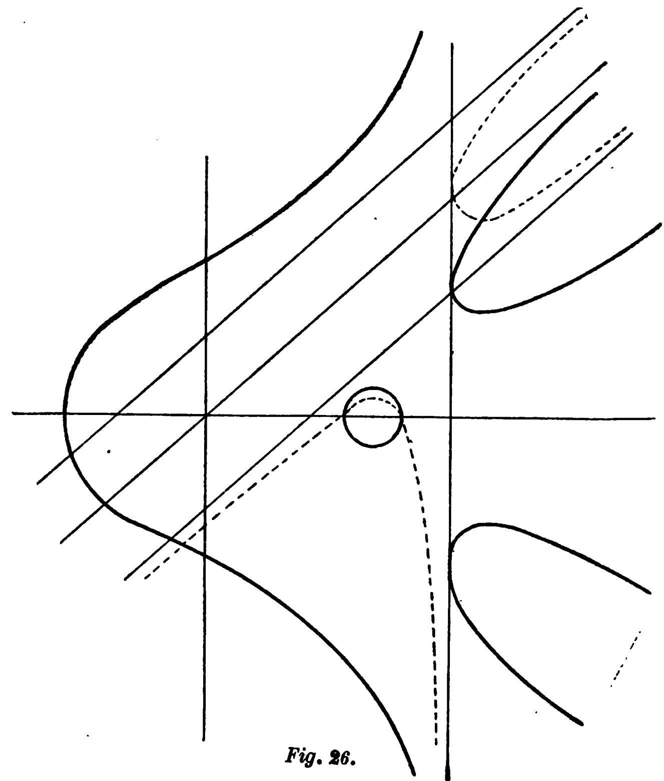


Fig. 26.

indéfiniment jusqu'à devenir infinies pour $x = d$. Nous pouvons donc tracer la courbe auxiliaire à gauche. De $x = d$ jus-

que $x = -\frac{c}{b}$, il n'y aura pas de valeurs réelles pour Y, en faisant $x = -\frac{c}{b}$ on a $Y = o$, et à mesure que x augmente les valeurs constamment réelles augmentent; mais tendent vers la même limite. Il est donc facile de tracer la courbe auxiliaire et la courbe définitive. Comme dans le cas précédent les branches infinies à droite auront pour asymptotes des paraboles.

Supposons maintenant la quantité b négative, nous aurons

$$Y = \pm \sqrt{\frac{-b\left(x + \frac{c}{b}\right)}{x - d}},$$

et supposons $-\frac{c}{b} < d$. Je ne pourrai donner des valeurs

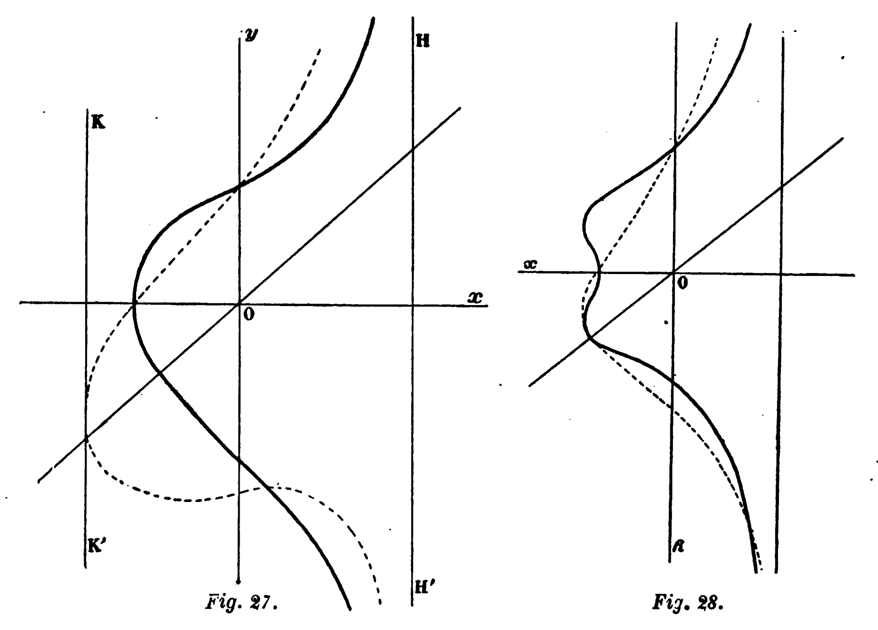


Fig. 27. *Fig. 28.*

à x plus petites que d, pour $x = \frac{c}{b}$ on aura $Y = o$; à mesure que x croîtra, les valeurs de Y croîtront indéfiniment,

jusqu'à devenir infinies pour $x = d$. On aura donc deux arcs de courbe compris entre les parallèles HH', KK'. Il est du reste impossible de faire croître x au-dessus de d; donc la courbe n'aura qu'une branche.

Nous avons à faire une dernière hypothèse : $d < -\frac{c}{b}$. Dans ce cas la courbe ne diffère de la précédente que du sens suivant lequel est placé la partie infinie. Elle est alors dirigée à gauche; car pour $x = d$, on a $Y = \pm \infty$ et les valeurs vont constamment en approchant de o, à mesure que x approche de $-\frac{c}{b}$. Donc la courbe sera facile à construire *(fig. 28)*.

Si l'on supposait $b = 0$ et $a \gtrless 0$, cela ne donnerait pas de forme particulière et on voit que cela rentre dans les exemples cités. Il n'en est pas de même en posant $a = 0$, $b = 0$, alors nous aurons

$$Y = \pm \sqrt{\frac{c}{x - d}};$$

il peut arriver que c soit > 0 ou $c < 0$. Dans le premier cas je ne pourrai donner à x des valeurs plus petites que d, dans le second des valeurs plus grandes. Supposons $c > 0$, partons de $x = d$ nous aurons $Y = \pm \infty$. A mesure que x croîtra, les valeurs de Y diminueront de manière à être nulles quand on fera $x = \pm \infty$.

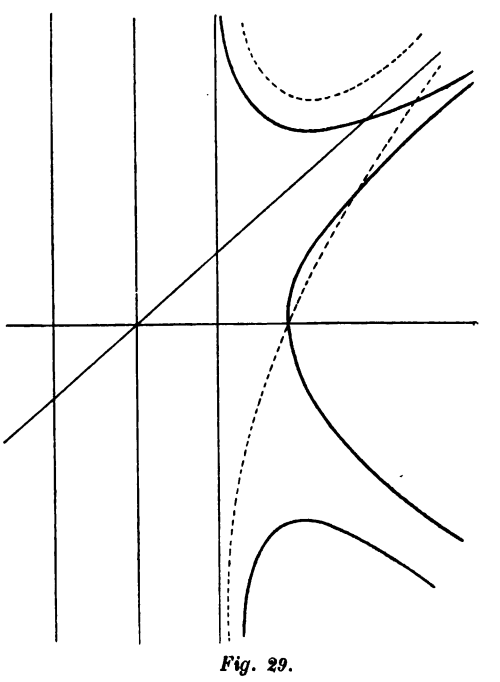


Fig. 29.

Le diamètre $y = x$ sera donc asymptote à cette courbe auxiliaire. Construisons-la. Les deux branches de la courbe, infinies à droite, seront asymptotes l'une à l'autre et à la bole $y^2 = x$. En effet, en faisant $x = \infty$ dans $y^2 = x \pm \sqrt{\frac{c}{x-d}}$ on a $y^2 = x$, donc la forme est déterminée.

Supposons enfin $c < 0$; alors je ne pourrai donner à x que des valeurs plus petites que d; la courbe auxiliaire sera infinie à gauche ; Y s'approche de o autant qu'on le voudra.

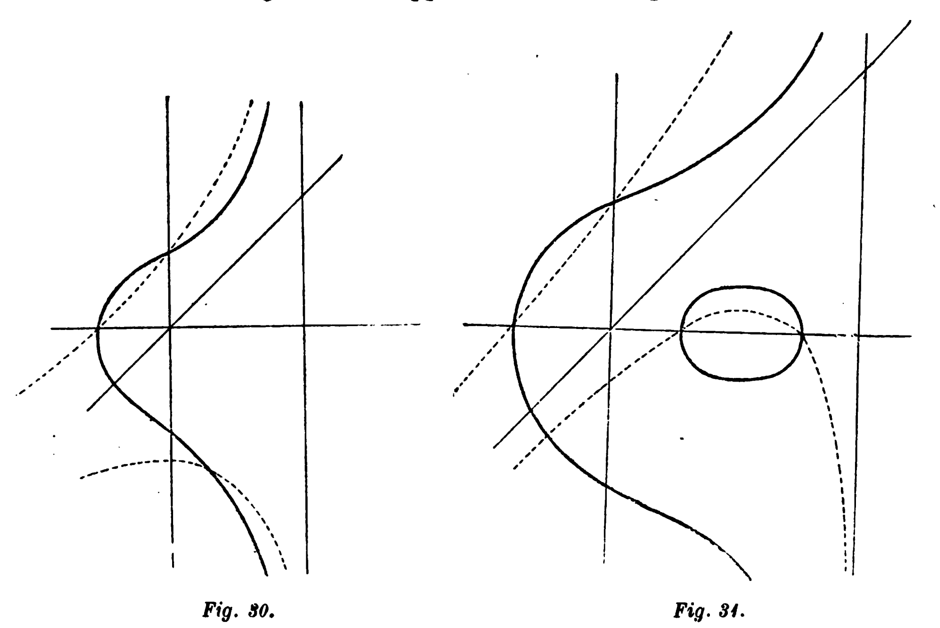


Fig. 30. *Fig. 31.*

Cette hypothèse est la dernière que nous ayons à faire ; car $c = 0$ donnerait une parabole.

Finalement, nous avons examiné tous les cas qui pourront se présenter, en examinant successivement les valeurs relatives des coefficients et les différents signes dont ils sont affectés.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 88.)

219. — *Soient* AA_1, BB_1, CC_1 *trois droites concourantes en* M, *et limitées aux côtés du triangle de référence. Les droites qui joignent respectivement les milieux des côtés de* ABC, *aux milieux des droites* AA_1, BB_1, CC_1 *se coupent en un point* P *milieu de la distance des brocardiens de* M.

Soient A′, A_2, les milieux de BC et AA_1 (α_1, β_1, γ_1) les coordonnées barycentriques de M. L'équation de $A'A_2$ est :

$$\alpha(\gamma_1 - \beta_1) + (\beta - \gamma)(\beta_1 + \gamma_1) = 0$$

et deux autres analogues pour $B'B_2$, $C'C_2$. Ces droites se coupent au point :

$$\frac{\alpha}{\alpha_1(\beta_1 + \gamma_1)} = \frac{\beta}{\beta_1(\alpha_1 + \gamma_1)} = \frac{\gamma}{\gamma_1(\alpha_1 + \beta_1)}.$$

220. — *Point de concours de deux droites de Simson rectangulaires.*

Elles correspondent à deux points diamétralement opposés du cercle circonscrit.

Prenons pour axe des x le côté BC du triangle ABC, et, pour axe des y, la perpendiculaire en B à BC. Soient M, M′, deux points diamétralement opposés de la circonférence circonscrite. Soient $MB = d$, α, β les angles MBC, MBA, P, Q les projections de M sur BA, BC, $M'B = d'$.

L'équation de PQ est :

$$(1) \qquad \frac{y}{\cos\beta \sin B} = \frac{x - d\cos\alpha}{\cos\beta\cos B - \cos\alpha},$$

celle de la droite de Simson, correspondant à M′,

$$(2) \qquad \frac{y}{\sin\beta\sin B} = \frac{x - d'\sin\alpha}{\sin\beta\cos B + \sin\alpha};$$

d'ailleurs

$$d = 2R\sin(A + \alpha)$$
$$d' = -2R\cos(A + \alpha).$$

Si l'on élimine x entre (1) et (2), on trouve :

$$(3) \qquad y = R\sin 2\beta\sin(A + 2\alpha).$$

Si δ est la distance du même point à BA. On a de même :

$$(4) \qquad \delta = R\sin 2\alpha\sin(C + 2\beta).$$

Pour le lieu du point de rencontre de ces droites, on trouverait par l'élimination de α, β entre (3) et (4) un cercle qui est le cercle d'Euler de ABC. (Résultat bien connu.)

221. — ***Deux droites de Simson, rectangulaires, sont les asymptotes d'une hyperbole équilatère circonscrite au triangle.***

D'après l'exercice précédent, soit l'équation

$$\left(\frac{y}{\cos\beta \sin B} - \frac{x - d\cos\alpha}{\cos\beta\cos B - \cos\alpha}\right)\left(\frac{y}{\sin\beta\sin B} - \frac{x - d'\sin\alpha}{\sin\beta\cos B + \sin\alpha}\right) = k^2$$

d'une hyperbole équilatère ayant, pour asymptotes, les deux droites de Simson des points M, M'; si cette courbe passe par B, on a :

$$k^2 = \frac{dd' \sin\alpha \cos\alpha}{(\cos\beta\cos B - \cos\alpha)(\sin\beta\cos B + \sin\alpha)}.$$

On constate aisément que cette valeur de k^2 détermine une hyperbole qui passe également par les deux autres sommets.

222. — *Lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites à un triangle.*

Soit, en coordonnées normales, l'équation d'une conique inscrite à un triangle :

$$\sum A^2x^2 - \sum 2ABxy = 0.$$

Si c'est une hyperbole équilatère, on a :

$$(1) \qquad \sum A^2 + \sum 2AB \cos C = 0.$$

D'ailleurs, les équations du centre sont :

$$\frac{x}{bC + cB} = \frac{y}{cA + aC} = \frac{z}{aB + bA},$$

d'où, en coordonnées barycentriques :

$$(2) \qquad \frac{A}{a(\beta + \gamma - \alpha)} = \frac{B}{b(\alpha - \beta + \gamma)} = \frac{C}{c(\alpha + \beta - \gamma)}.$$

Éliminant A, B, C entre (1) et (2), il vient

$$\sum(\beta + \gamma - \alpha)^2a^2 + 2\sum(\beta + \gamma - \alpha)(\alpha - \beta + \gamma)ab\cos C = 0$$

et, toutes réductions faites :

$$\sum x^2 \sin 2A = 0,$$

équation du cercle polaire conjugué.

223. — *Le lieu des réciproques des points de Gergonne, des coniques de l'exercice précédent n° 222, est le cercle de Longchamps.*

Les coordonnées barycentriques du point de Gergonne d'une des coniques précédentes sont :

$$\frac{a}{A}, \frac{b}{B}, \frac{c}{C},$$

d'où, en vertu de la relation (1) de l'exercice précédent :

$$\sum a^2\alpha^2 + \sum 2ab \cos C\,\alpha\beta = 0.$$

On peut aussi remarquer que le réciproque du point de Gergonne d'une conique inscrite est l'anticomplémentaire du centre de cette conique; donc le lieu de ce réciproque est l'anticomplémentaire du cercle polaire conjugué; cette figure est le cercle de Longchamps.

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu, de M. d'Ocagne, la lettre suivante :

Mon ami M. Schoute vient de me faire remarquer une inadvertance que j'ai commise en réduisant au cas de la parabole une propriété générale d'une certaine classe de courbes algébriques d'ordre quelconque, que j'ai obtenue dans mon Mémoire de 1885 de l'*American Journal of Mathematics.*

Comme cet énoncé se trouve donné dans une Note que j'ai publiée dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (1891, p. 101), je vous serai obligé d'en faire paraître la rectification. La voici :

Si la normale en A, *à une parabole, rencontre cette courbe en* A′, *et si* P *est un point quelconque de cette normale, la corde qui joint les pieds des deux autres normales, que du point* P *on peut mener à la parabole, rencontre le cercle décrit sur* PA′ *comme diamètre aux points où ce cercle est coupé par le diamètre issu de* B *et par la tangente en ce point.*

EXERCICE ÉCRIT

55. — D'un point M, du plan d'une ellipse E, on abaisse les normales sur cette ellipse. On considère l'hyperbole équilatère H passant par les pieds des normales, et les deux paraboles P, Q passant par ces mêmes points.

1° Quel que soit M, la différence des carrés des paramètres des paraboles P, Q est dans un rapport constant avec le carré de l'axe de H.

2° Si le point M décrit une courbe u, le point de concours des axes p, q des paraboles P, Q décrit une courbe homographique de u.

3° Les axes p, q coupent E, en quatre points situés sur une circonférence Γ.

a) Trouver le lieu décrit par M, quand Γ passe par le centre de E.

b) Trouver le lieu décrit par M, quand Γ a un rayon constant.

4° Démontrer que M et le centre de Γ décrivent, quand l'un d'eux est mobile, des lieux homographiques.

(*E. M. Barisien.*)

Notes sur l'exercice 54.

1° Soient x', y' les coordonnées du point M. L'équation de P′ est

$$y(yy' - px - px') + \frac{p^2}{4y'}(x - x')^2 = 0.$$

On faisant $x = 0$, on a

$$4y^2y'^2 - 4px'y'y + p^2x'^2 = 0$$

ou

$$(2yy' - px')^2 = 0.$$

La parabole P′ touche l'axe des y en un point B tel que

$$OB = \frac{px'}{2y'} = \frac{y'}{4}.$$

Par suite, le lieu du point C est la parabole Π qui correspond à l'équation

$$8y^2 - px = 0.$$

2° En observant que le foyer d'une parabole inscrite dans un angle droit coïncide avec la projection du sommet de l'angle droit sur la corde des contacts, on trouve, pour représenter le lieu demandé,

$$8x(x^2 + y^2) = py^2.$$

3° Les paraboles P′, P″ ayant, respectivement, pour équation :

$$\left(\frac{x}{x'} + \frac{4y}{y'} - 1\right)^2 = 16\,\frac{yx}{x'y'}, \qquad (P')$$

$$\left(\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} - 1\right)^2 = \frac{4xy}{x'y'}. \qquad (P'')$$

On voit que la cordé commune CD est représentée par

$$2\left(\frac{x}{x'} + 1\right) = 5\,\frac{y}{y'}.$$

Elle coupe la tangente en M sur l'axe ox.

4° Considérons une parabole quelconque tangente aux axes ; soit

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 1\right)^2 = \frac{4xy}{ab}$$

son équation.

En cherchant son intersection avec la parabole proposée, on est conduit à une équation en λ. L'une des racines de cette équation est

$$\lambda_1 = \frac{2b^2}{pa}.$$

Les deux autres racines sont données par l'équation

$$k'\lambda^2 - k'\lambda + 2 = 0,$$

dans laquelle on a posé $\qquad k' = \dfrac{2b^2}{pa}.$

Les trois racines sont réelles, si l'on a

$$a(pa - 8b^2) > 2.$$

En considérant le plan comme partagé aux régions par l'axe oy et par la parabole Π, précédemment trouvée, on voit qu'il y a quatre points d'intersection réels à l'intérieur de cette parabole; deux réels, deux imaginaires, entre Π et oy; enfin, quatre points imaginaires dans la troisième région.

5° Pour traiter cette dernière partie on peut utiliser la remarque suivante.

L'équation $U^2 = V$, (U, V fonctions du premier degré en x, y) représente une parabole et $U = \mu V + \frac{1}{4\mu}$, est l'équation d'une tangente quelconque.

La courbe demandée correspond aux formules unicursales

$$\frac{x}{p} = -\frac{1}{(m+2)(m^2+1)}, \qquad \frac{y}{p} = \frac{m^3+m+2}{2m(m^2+1)(m+2)}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

349. — On considère une hyperbole équilatère H; par l'un des foyers F, on mène Δ parallèle à l'une des asymptotes de H. D'un point M, mobile sur H, on abaisse une perpendiculaire MP sur Δ.

Démontrer que le cercle inscrit au triangle FMP a un rayon invariable. *(G. L.)*

350. — On considère une ellipse Γ et le cercle Δ inscrit au losange formé par les sommets de Γ. D'un point M, mobile sur Γ, on peut mener à Δ deux tangentes qui touchent Δ: l'une en P; l'autre en Q. Les axes de Γ coupent les droites MP, MQ respectivement aux points P', Q'. Démontrer que le rapport $\frac{PP'}{QQ'}$ est constant. *(G. L.)*

351. — On considère la famille des cubiques dont l'équation est

$$x^3 = ay^2.$$

D'un point du plan on mène les tangentes et les normales à ces cubiques.

1° Lorsque le paramètre a varie, le lieu des points de contact des tangentes est une hyperbole équilatère, celui des pieds des normales est une ellipse.

2° Le lieu des points d'où l'on peut mener à la cubique

$$x^3 = ay^2;$$

quatre normales formant un faisceau harmonique est une parabole. *(E.-N. Barisien.)*

352. — On donne une ellipse, un point P qu'on joint aux foyers. Démontrer que les centres des sécantes communes au système des deux droites ainsi obtenues et à l'ellipse sont sur l'hyperbole d'Apollonius du point P. *(Ch. Michel.)*

353. — 1° Trouver les nombres qui sont, à la fois, triangulaires et pentagonaux; *c'est-à-dire:* résoudre en nombres entiers. l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} = \frac{y(3y \mp 1)}{2}.$$

2° *Théorème.* — Tout nombre triangulaire, s'il n'est pas pentagonal, est la somme de moins de sept nombres pentagonaux.

3° *Théorème.* — Si, au double d'un nombre triangulaire, on ajoute un carré, on obtient la somme de deux nombres triangulaires (l'un de ceux-ci peut être nul) (*).

4° Dans quels cas a-t-on

$$C_{n,p} = C_{n-1,\ p+1}\ (^{**}).$$

(Catalan.)

(*) Presque évident.

(**) On trouve, en particulier:

$$C_{104,39} = C_{103,40} \quad ; \quad C_{714,272} = C_{713,273}.$$

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 8960-4-92.

SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE
DANS SON PLAN

Par M. **Balitrand**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Nous nous proposons d'étudier le déplacement géométrique d'une figure plane, de forme invariable, surtout au point de vue de la courbure des trajectoires de ses points. Le déplacement infiniment petit de la figure peut être obtenu par une rotation autour d'un point I, appelé centre instantané de rotation.

Prenons, dans le plan de la figure, deux axes de coordonnées ox et oy. Soient (x, y) les coordonnées d'un point quelconque M; α et β celles du centre instantané de rotation I; x' et y' celles d'un point M' infiniment voisin de M. Désignons par φ l'angle de IM avec ox. On a :

$$x' = x - \mathrm{MM'} \sin \varphi,$$
$$y' = y + \mathrm{MM'} \cos \varphi;$$

d'où

$$(1) \qquad \begin{cases} dx = -(y - \beta)\, d\varphi, \\ dy = (x - \alpha)\, d\varphi. \end{cases}$$

En différentiant ces formules on obtient :

$$(2) \qquad \begin{cases} d^2x = -(y - \beta)\, d^2\varphi - (x - \alpha)\, d\varphi^2 + d\beta d\varphi, \\ d^2x = (x - \alpha)\, d^2\varphi - (y - \beta)\, d\varphi^2 - d\varphi d\alpha. \end{cases}$$

Supposons maintenant l'origine des coordonnées au point I; φ étant la variable indépendante, on a $d^2\varphi = 0$. Enfin, choisissons la direction de l'axe des x de façon que $d\beta$ soit nul, et posons

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = -k\,;$$

les formules (1) et (2) deviennent :

$$(3) \qquad \frac{dx}{d\varphi} = -y, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = x.$$

$$(4) \qquad \frac{d^2x}{d\varphi^2} = -x, \qquad \frac{d^2y}{d\varphi^2} = -(y - k).$$

Cela posé, soit

$$(X - x')^2 + (Y - y')^2 - R^2 = 0,$$

l'équation d'un cercle. Si nous exprimons qu'il passe par les trois points

(x, y) $(x + dx,\ y + dy)$ $(x + dx + d^2x,\ y + dy + d^2y)$

il coïncidera avec le cercle osculateur à la trajectoire du point M : α et β seront les coordonnées du centre de courbure, R sera le rayon de courbure.

On obtient ainsi les trois équations

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 - R^2 = 0,$$
$$(x - x')dx + (y - y')dy = 0,$$
$$(x - x')d^2x + (y - y')d^2y + dx^2 + dy^2 = 0.$$

Les deux dernières donnent

$$x - x' = \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{dxd^2y - dyd^2x},$$
$$y - y' = \frac{-dx(dx^2 + dy^2)}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

La première donne ensuite la formule classique

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

En remplaçant dx, dy, d^2x, d^2y par leurs valeurs tirées des relations (3) et (4), on obtient les formules

$$(5) \qquad x' = \frac{-kxy}{x^2 + y^2 - ky}, \qquad y' = \frac{-ky^2}{x^2 + y^2 - ky}.$$

Nous retrouverons ces formules plus loin par une autre méthode. L'expression du rayon de courbure devient

$$(6) \qquad R = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^2 - ky}.$$

En coordonnées polaires (Υ, θ)

$$(7) \qquad R = \frac{\Upsilon^2}{\Upsilon - k \sin \theta}.$$

L'expression du rayon de courbure montre qu'il devient infini lorsque $x^2 + y^2 - ky = 0$. Le cercle représenté par cette équation porte le nom de cercle des inflexions. D'où ce théorème :

Le lieu des points pour lesquels le rayon de courbure est infini,

c'est-à-dire qui, à l'instant considéré, se trouvent en un point d'inflexion de leur trajectoire, est le cercle des inflexions.

De même, si $x^2 + y^2 = 0$, $R = 0$. Donc :

Le lieu des points qui, à un instant donné, coïncident avec le centre de courbure de leur trajectoire, se compose des droites isotropes, issues du centre instantané de rotation.

La courbe du sixième ordre qui a pour équation

$$(x^2 + y^2)^3 - a^2(x^2 + y^2 - ky)^2 = 0\ ;$$

ou, en coordonnées polaires

$$\Upsilon^2 - a\Upsilon + ak \sin\theta = 0,$$

représente le lieu des points qui, à l'instant considéré, ont un rayon de courbure égal à a.

La relation (7) peut se mettre sous d'autres formes bien connues, que nous allons indiquer. La droite IM rencontre le cercle des inflexions en N. On a

$$MN = r - k\sin\theta,$$

donc

$$R = \frac{r^2}{MN}. \tag{8}$$

Soit $M'(x', y')$ le centre de courbure de la trajectoire du point M. La relation (8) s'écrit :

$$IM - IM' = \frac{\overline{IM}^2}{IM - IN},$$

d'où

$$\frac{1}{IM} - \frac{1}{IM'} = \frac{1}{IN}. \tag{9}$$

Cette relation prouve que les points M et M′ décrivent sur la droite IM deux divisions homographiques dont les points doubles sont confondus en O. Si M passe à l'infini, M′ vient en N′ symétrique de N par rapport à I. Si M′ passe à l'infini, M vient au point N.

La relation (9) permet d'exprimer les coordonnées de M′ en fonction de celles de M, et réciproquement. En effet, l'on a

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'},$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{1}{IN},$$

avec

$$IN = \frac{ky}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{ky'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

On en déduit

(5) $$\begin{cases} x' = \dfrac{-kxy}{x^2+y^2-ky} \cdot \\ y' = \dfrac{ky^2}{x^2+y^2-ky} \end{cases}$$

(10) $$\begin{cases} x = \dfrac{kx'y'}{x'^2+y'^2+ky'} \\ y = \dfrac{ky'^2}{x'^2+y'^2+ky'} . \end{cases}$$

On voit que la transformation qui permet de passer de M à M′ n'est pas homographique. Elle appartient à la classe des transformations Crémona et elle est du second degré. Par conséquent, si l'on considère le déplacement d'une courbe de degré m, les centres de courbure des trajectoires de ses points se trouvent à un instant donné sur une courbe de degré $2m$.

Les formules (10) montrent que x et y deviennent infinis si $x'^2 + y'^2 + ky' = 0$.

Le cercle C, représenté par cette équation, est symétrique du cercle des inflexions par rapport à Ox. Donc :

Dans le déplacement d'une figure plane, les centres de courbure des trajectoires des points situés à l'infini sont sur le cercle C.

La relation entre M et M′ n'est pas homographique. Elle est du second degré. Ainsi, lorsque le point M décrit une droite Δ, le point M′ décrit une conique. Ce théorème est dû à Rivals, et nous désignerons la conique, sous le nom de *conique de Rivals.*

Soit $$ux + vy - 1 = 0$$
l'équation de la droite ; l'équation de la conique de Rivals, correspondante, est
$$ky(ux + vy) - (x^2 + y^2 + ky) = 0.$$

Elle est osculatrice en I au cercle C, et elle passe par l'intersection de ce cercle et de la parallèle menée, par I, à Δ. D'où :

Théorème I. — *Les centres de courbure des trajectoires des points d'une droite* Δ *se trouvent sur une conique osculatrice, en* I, *au cercle* C *et passant par le point de rencontre de ce cercle et de la parallèle menée par* I *à* Δ.

Théorème II. — *Si l'on considère les droites parallèles à une direction fixe; les coniques de Rivals correspondantes ont leurs centres sur une droite.*

Théorème III. — *Quand la direction fixe varie, les droites lieux des centres des coniques de Rivals passent par un point fixe, le centre du cercle* C.

(A suivre.)

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UNE FORME QUADRATIQUE

EN UN PRODUIT DE DEUX FACTEURS LINÉAIRES

Par **G. Méténier**, professeur au Collège de Saint-Flour.

(*Suite*, voir. p. 105.)

---

5. — Nous remarquerons que si chacune des équations $f(x, y, z) = o$, $f_1(x, y, z) = o$ représente un couple de droites, on a $H = o$, et $H' = o$. L'équation (6) a une racine nulle et une racine infinie. La troisième racine a pour valeur $\frac{\Theta_1}{\Theta}$ et donne le couple de sécantes distinct de $f = o$ et de $f_1 = o$. On voit que, dans ce cas, l'équation (6) a toujours ses racines réelles.

Théorème. — *Une racine imaginaire de l'équation en* λ *donne toujours un couple de sécantes communes imaginaires.*

Par l'application du théorème du § 2, le déterminant K nous donne les six équations fondamentales

(11) $A = o,\ B = o,\ C = o,\ A' = o,\ C' = o,\ D = o.$

Donnons à λ, dans ces équations, la valeur imaginaire $p + iq$. Supposons que l'une au moins des droites du couple correspondant soit réelle, et que α, β, γ soient les valeurs réelles des coordonnées de cette droite. Il faudra que, dans chaque équation (11), le coefficient de i et le terme indépendant de i soient séparément nuls. On aura donc les deux systèmes d'équations :

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{r} d\alpha^2 - 2c\alpha\gamma + a\gamma^2 = 0,\\ d\beta^2 - 2c'\beta\gamma + a'\gamma^2 = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ c'\alpha^2 + a\beta\gamma - b\alpha\gamma - c\alpha\beta = 0,\\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{r} d_1\alpha^2 - 2c_1\alpha\gamma + a_1\gamma^2 = 0,\\ d_1\beta^2 - 2c'_1\beta\gamma + a'_1\gamma^2 = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ c'_1\alpha^2 + a_1\beta_1\gamma_1 - b_1\alpha\gamma - c_1\alpha\beta = 0.\\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les six équations du groupe (12) expriment que la conique $f(x, y, z) = 0$ se réduit au système de deux droites d'après le théorème fondamental, et les six équations du groupe (13) expriment de même que la conique $f_1(x, y, z) = 0$ se réduit aussi au système de deux droites. Ainsi, une racine imaginaire de l'équation en λ ne pourrait donner un couple ayant au moins une droite réelle, que si chacune des coniques se réduisait à un système de deux droites. Mais nous savons que, dans ce cas, l'équation en λ n'admet pas de racine imaginaire. Donc une racine imaginaire de l'équation en λ donne toujours un couple de sécantes communes imaginaires.

Théorème. — *Une racine réelle de l'équation en λ donne un couple réel ou imaginaire suivant qu'elle rend négatif ou positif un des mineurs principaux du déterminant $\Delta(\lambda)$.*

A cause des relations classiques : $\Delta_a\Delta_d = \Delta_c^2$, $\Delta_{a'}\Delta_d = \Delta_{c'}^2$, $\Delta_a\Delta_{a'} = \Delta_b^2$, on sait que les trois mineurs principaux Δ_a, $\Delta_{a'}$ et Δ_d sont de même signe pour la valeur de λ, racine de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$. La démonstration du théorème résulte alors immédiatement de la considération des formules (9) qui montrent que $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$ sont réelles ou imaginaires suivant que Δ_d est négatif ou positif.

6. Théorème. — *Deux coniques quelconques admettent toujours un couple de sécantes communes réelles.*

La considération du déterminant $\Delta(\lambda)$ et de son adjoint nous donne la relation connue :

$$(14)\qquad (d - \lambda d_1)\Delta(\lambda) = \Delta_a\Delta_{a'} - \Delta_b^2.$$

Considérons l'équation $\Delta_a = 0$ qui, développée, devient :
$\Delta_a = (a'_1d_1 - c'^2_1)\lambda^2 - (a'd_1 + a'_1d - 2c'c'_1)\lambda + a'd - c'^2 = 0.$

Supposons d'abord ses racines réelles et inégales ; désignons-les par λ' et λ''. En substituant ces valeurs dans (14), nous aurons :

$$(15)\qquad \begin{aligned} (d - \lambda'd_1)\Delta(\lambda') &= -(\Delta_b^2)_{\lambda'},\\ (d - \lambda''d_1)\Delta(\lambda'') &= -(\Delta_b^2)_{\lambda''}. \end{aligned}$$

Si nous substituons $\frac{d}{d_1}$ à λ, dans Δ_a, nous aurons $-(c'_1\frac{d}{d_1} - c')^2$ résultat négatif ou nul. S'il est nul, $\frac{c'}{c'_1} = \frac{d}{d_1}$. Alors on remplacera l'équation $\Delta_a = 0$, par l'équation $\Delta_{a'} = 0$. Le résultat de la substitution de $\frac{d}{d_1}$ à λ sera $-(c_1\frac{d}{d_1} - c)^2$. Il est négatif ou nul. S'il est nul $\frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1}$; et, par suite, $\frac{c}{c_1} = \frac{c'}{c'_1} = \frac{d}{d_1}$. Alors on remplacera les équations (7) par celles-ci :

$$(16)\qquad \begin{aligned} (a' - \lambda a'_1)\gamma^2 - 2(c' - \lambda c'_1)\gamma\beta + (d - \lambda d_1)\beta^2 &= 0,\\ (a' - \lambda a'_1)\alpha^2 - 2(b - \lambda b_1)\alpha\beta + (a - \lambda a_1)\beta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Δ_a et $\Delta_{a'}$ seront remplacés par Δ_a et Δ_d. On considère l'équation $\Delta_d = 0$, et on remplace λ, dans cette équation, par $\frac{a'}{a'_1}$. On trouve encore que le résultat de la substitution est nul ou négatif. S'il est nul, $\frac{b}{b_1} = \frac{a'}{a'_1}$. On considère alors l'équation $\Delta_a = 0$ où l'on substitue $\frac{a'}{a'_1}$. Si le résultat de la substitution est nul, on aura $\frac{c'}{c'_1} = \frac{a'}{a'_1}$. On associe alors la première des équations (7) à la dernière des équations (16). On est conduit à considérer les deux équations $\Delta_{a'} = 0$ et $\Delta_d = 0$, dans lesquelles on substitue $\frac{a}{a_1}$. Si les résultats des substitutions sont nuls, il faudra qu'on ait, en résumé :

$$\frac{a}{a_1} = \frac{a'}{a'_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{c'}{c'_1} = \frac{d}{d_1}.$$

Dans ce cas, les deux coniques coïncident, et il y a une infinité de sécantes communes réelles. Supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi et qu'un au moins des résultats des substitutions ne soit pas nul, par exemple

$$-\left(c'_1\frac{d}{d_1}-c'\right)^2.$$

Ce résultat sera négatif : nous nous servirons des équations (7), et nous considérerons l'équation $\Delta_a = 0$.

On peut faire l'hypothèse $a'_1d_1 - c_1'^2 \neq 0$. Car, cela revient à supposer que la conique $f_1 = 0$ n'est pas tangente à l'axe des y, ou à un côté donné du triangle de référence, supposition évidemment permise, puisque, d'après les propriétés des substitutions linéaires, elle peut être réalisée à l'aide d'une transformation réelle des coordonnées, n'altérant pas le caractère de réalité d'une racine de l'équation en λ et du couple de sécantes communes correspondant. Alors nous aurons deux cas à distinguer :

1er Cas. — $a'_1d_1 - c_1'^2 > 0$. Dans ce cas, $\frac{d}{d_1}$ est compris entre les racines λ' et λ'' de $\Delta_a = 0$; et, par suite, $d - \lambda'd_1$ et $d - \lambda''d_1$ sont de signes contraires. D'après les relations (15) il en est de même de $\Delta(\lambda')$ et $\Delta(\lambda'')$. Conséquemment λ' et λ'' comprennent au moins une racine réelle de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$, et Δ_a sera négatif pour cette racine. Le couple de sécantes correspondant sera donc réel.

2e Cas. — $a'_1d_1 - c_1'^2 < 0$. — Dans ce cas, $\frac{d}{d_1}$ est extérieur aux racines λ' et λ''. Alors $d - \lambda'd_1$ et $d - \lambda''d_1$ sont de même signe. D'après les relations (15), il en sera de même de $\Delta(\lambda')$ et $\Delta(\lambda'')$. Donc λ' et λ'' comprennent zéro ou deux racines de $\Delta(\lambda) = 0$. Si cette équation n'a qu'une racine réelle, elle sera nécessairement extérieure à λ' et λ'', et si elle en a trois, il y en aura toujours une extérieure à λ' et λ''. Cette racine rendra Δ_a négatif, et le couple de sécantes correspondant sera réel.

Supposons maintenant les racines de l'équation $\Delta_a = 0$ imaginaires ou égales. Nous aurons, dans ce cas :

$$(a'd_1 + a'_1d - 2c'c'_1)^2 - 4(a'_1d_1 - c_1'^2)(a'd - c'^2) \leqslant 0.$$

Or, cette condition se transforme en :

$$\left(a'd_1 - a'_1d - 2\frac{a'c_1'^2}{a'_1} + 2c'c'_1\right)^2 + 4\left(a'_1d_1 - c_1'^2\right)\left(c' - \frac{a'c'_1}{a'_1}\right)^2 \leqslant 0.$$

On le reconnaît en effectuant les calculs, et en constatant l'identité des deux premiers membres de ces inégalités. Cette condition, pour être remplie, exige évidemment que l'on ait :

$$a'_1d_1 - c_1'^2 < 0.$$

Mais dans ce cas, Δ_a conservant invariablement le signe du coefficient de λ^2 sera par suite toujours négatif. Donc le couple correspondant à une racine réelle de l'équation en λ sera lui-même réel. Le théorème est donc démontré.

De la démonstration qu'on vient de faire résulte encore le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'équation formée en annulant un des mineurs principaux de* $\Delta(\lambda)$ *a ses racines égales ou imaginaires, les deux coniques admettent autant de couples de sécantes communes réelles que l'équation* $\Delta(\lambda) = 0$ *admet de racines réelles.*

On peut en effet répéter, sur les équations $\Delta_{a'} = 0$ et $\Delta_d = 0$, le raisonnement qu'on vient de faire sur $\Delta_a = 0$ dans le cas où les racines de cette équation sont imaginaires. On sait du reste, que les trois mineurs principaux sont de même signe pour une valeur de λ, racine de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$.

Ce théorème s'applique déjà à un très grand nombre de cas, et permet alors de déterminer, pour ainsi dire *a priori*, le nombre des couples réels, quand on connaît le nombre des racines réelles de l'équation en λ. *(A suivre.)*

SUR UN THÉORÈME, CONNU, DE GÉOMÉTRIE

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

Par M. **A. Boulanger**, ancien élève de l'École polytechnique, professeur aux Écoles académiques de Lille.

Le théorème que nous nous proposons d'établir par des considérations élémentaires est le suivant :

« *Étant donnée une ellipse, on mène des cordes parallèles entre*

elles; sur ces cordes, comme diamètres, on décrit des circonférences; l'enveloppe de ces circonférences est une ellipse qui a pour foyers les extrémités du diamètre conjugué des cordes considérées. »

M. Mannheim, dans son *Cours de Géométrie descriptive de l'école Polytechnique* (11[e] leçon, p. 125-126), établit incidemment cette proposition, en considérant l'ellipse donnée comme la perspective cavalière, du contour apparent d'une sphère.

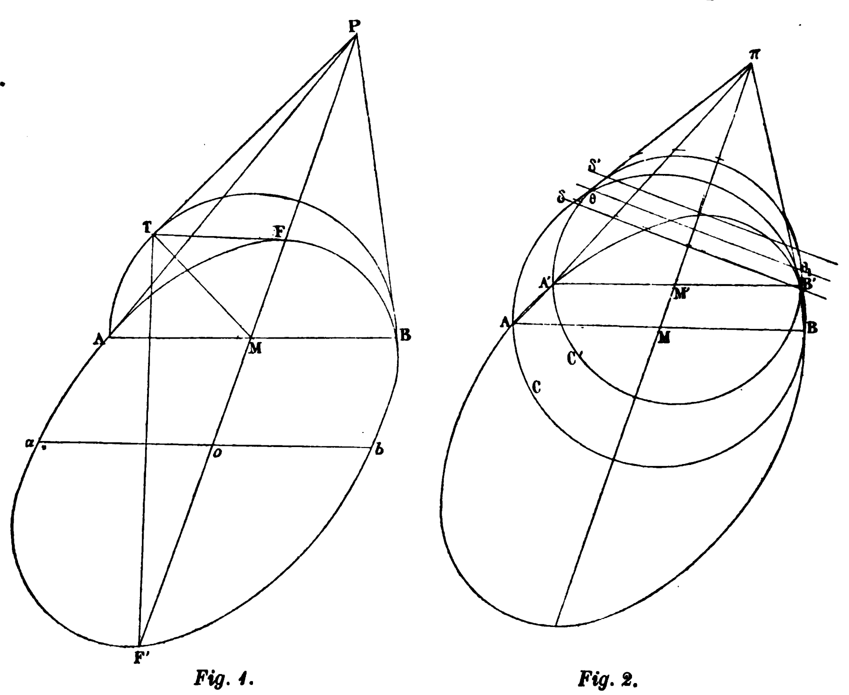


Fig. 1. *Fig. 2.*

On peut aussi la démontrer directement, d'une manière très simple, comme il suit.

Soient AB et A'B' deux cordes parallèles très voisines; M et M' leurs milieux; π le point de concours de AA', BB', MM'. le point π est centre de similitude des cercles C et C' décrits sur AB et A'B' comme diamètres. — Soient θ et θ_1 les points communs aux deux cercles; les positions limites de ces points quand A'B' se rapprochera indéfiniment de AB seront les points

de contact du cercle C avec son enveloppe. — Or la droite $\theta\theta_1$, axe radical de C et de C′, est équidistante des polaires δ et δ' du centre de similitude π par rapport aux cercles C et C′. A la limite, π tend vers le pôle P de AB, par rapport à l'ellipse; δ et δ' tendent vers la polaire D, de P. par rapport au cercle C. La droite $\theta\theta_1$, toujours comprise entre δ et δ', a donc pour limite D.

La recherche de l'enveloppe est alors ramenée à celle d'un lieu géométrique.

Soit AB une position de la corde mobile, M son milieu, P son pôle par rapport à l'ellipse, F et F′ les extrémités du diamètre de l'ellipse, conjugué de la direction AB. La division (PFMF′) est harmonique. — Sur AB comme diamètre, on décrit un cercle, et, par le point P, on mène les tangentes à ce cercle; il s'agit de trouver le lieu des points de contact T et T_1 de ces tangentes.

Le faisceau T(PFMF′) est harmonique, et les droites TP et TM sont rectangulaires.

Par suite TM est bissectrice de l'angle FTF′, l'on a

$$\frac{TF}{MF} = \frac{TF'}{MF'} = \frac{TF + TF'}{FF'}.$$

$$\overline{TM}^2 = TF.TF' - MF.MF'.$$

On déduit, de ces relations :

$$(1) \qquad \frac{\overline{TM}^2}{MF.MF'} = \frac{TF}{MF}\cdot\frac{TF'}{MF'} - 1 = \frac{(TF + TF')^2}{\overline{FF'}^2} - 1.$$

Soit, d'autre part, O le centre de l'ellipse, *aob* le diamètre parallèle à la direction AB.

Le deuxième théorème de Newton, relatif aux sécantes dans les coniques, donne :

$$(2) \qquad \frac{\overline{oa}^2}{\overline{OF}^2} = \frac{\overline{MA}^2}{MF.MF'}.$$

Si l'on observe que TM = MA, les relations (1) et (2) donneront :

$$\frac{(TF + TF')^2}{\overline{FF'}^2} = 1 + \frac{\overline{oa}^2}{\overline{OF}^2},$$

c'est-à-dire

$$TF + TF' = \overline{FF'}.\sqrt{1 + \frac{\overline{oa}^2}{\overline{OF}^2}} = 2\sqrt{\overline{oa}^2 + \overline{OF}^2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

α, β désignant les demi-axes de l'ellipse donnée.

Le lieu du point T, ou l'enveloppe cherchée, est donc une ellipse de foyers F et F', et dont le demi-grand axe est le rayon du cercle de Monge, de l'ellipse donnée.

Nota. — Ce théorème a été le sujet d'une composition au concours d'agrégation de l'enseignement spécial, en 1881.

NOTE SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ
DES SOLIDES A LA MESURE DESQUELS EST APPLICABLE
LA *RÈGLE DES TROIS NIVEAUX*

Par M. **Frétille,** ancien élève de l'École Polytechnique,
principal du Collège de Bône.

Appelons *tronc polyédrique* le polyèdre compris entre deux bases situées dans des plans parallèles et des faces latérales, triangles ou trapèzes, qui s'appuient à la fois sur les deux bases; et *section médiane* une section faite dans le tronc par le milieu de la hauteur, parallèlement aux bases.

Pour plus de commodité, nous supposerons ces bases horizontales; enfin nous désignerons par les lettres B, *b*, *b'*, H, la base inférieure, la base supérieure, la section médiane et la hauteur.

Lemme. — *Si on appelle* d *la distance de deux arêtes opposées d'un tétraèdre et* p *l'aire du parallélogramme déterminé dans le tétraèdre par un plan parallèle à ces arêtes et également distant de ces droites, le volume du tétraèdre est* $\frac{2}{3}$ pd.

Soient *(fig. 1)*, ABCD le tétraèdre, *mnpq* la section indiquée dans l'énoncé, *d* la distance de AB et de CD.

Sur la base BCD construisons le parallélogramme BCDβ ; puis, sur ce parallélogramme, un parallélépipède ayant AB

pour arête, ABCD$\alpha\beta\gamma\delta$. Soient P le volume de ce parallélépipède, T celui du tétraèdre : évidemment

$$T = \frac{1}{6} P.$$

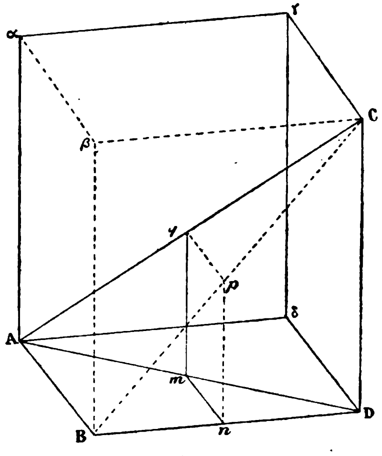


Fig. 1.

D'ailleurs, la distance des faces AB$\alpha\beta$ et CD$\gamma\delta$ étant la même que celle de AB et de CD, on a :
Enfin $P = DC\gamma\delta \times d$.
$CD = 2np$, $D\delta = AB = 2mn$.

Donc :

$$DC\gamma\delta = 4mnpq.$$

Multipliant et réduisant, on trouve

$$T = \frac{2}{3} mnpq \times d.$$

Règle des trois niveaux. — *Le volume du tronc polyédrique a pour mesure* (*)

$$\frac{H}{6}(B + b + 4b').$$

Nous allons donner, de ce théorème, une démonstration nouvelle, au moyen d'une décomposition qui a l'avantage de rendre accessible la recherche du centre de gravité.

Partageons les faces latérales qui sont des trapèzes, comme MNPQ *(v. fig. 2)*, en triangles tels que MNQ, MQP. Puis, de même, partageons la base inférieure en triangles ayant pour sommet commun un point C, et pour bases les côtés de cette base, et tels que CPQ. Enfin, ayant pris un point A, sur la base supérieure, considérons-le comme le sommet de pyramides ayant pour bases ces différents triangles. A chaque face latérale correspondra ainsi un groupe de trois tétraèdres tels que ACPQ, AMNQ, AMPQ. Il suffit de considérer un seul de ces groupes, dont l'ensemble constitue le tronc.

Le plan médian coupe les tétraèdres ci-dessus suivant les

(*) Voyez, à propos de cette formule (due à Sarrus, d'après M. Catalan) la note insérée dans le *Journal* 1886, p. 79. *G. L.*

triangles *ort*, *rsv*, dont les côtés sont respectivement parallèles à ceux de CPQ et de AMN, et suivant le parallélogramme

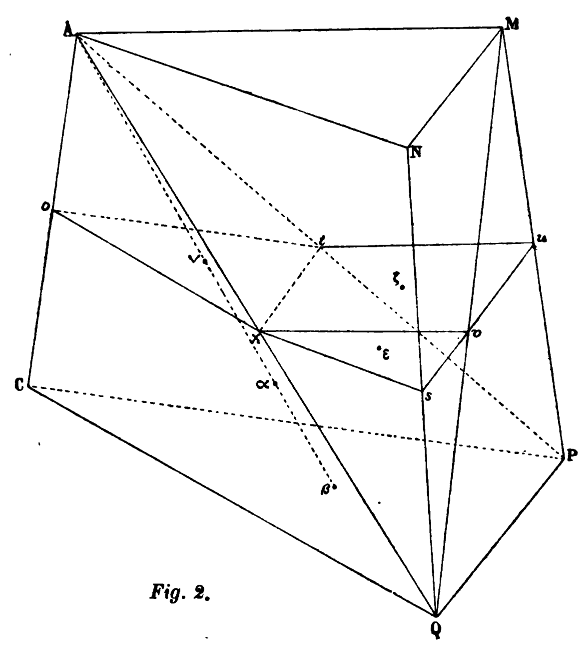


Fig. 2.

rvut, dont les côtés sont parallèles à AM et à PQ.

Cela posé, on a :

$$\text{vol ACPQ} = \frac{H}{3}.\text{CPQ},$$

ce qui peut s'écrire :

$$= \frac{H}{6}(\text{CPQ} + 4 ort),$$

puisque $\text{CPQ} = 4 ort.$

De même, $\text{vol AMNQ} = \frac{H}{6}(\text{AMN} + rsv).$

Enfin, $\text{vol AMQP} = \frac{4H}{6}.rtuv.$

En additionnant, nous trouvons pour le volume du groupe de tétraèdres :

$$\frac{H}{6}(\text{AMN} + \text{CPQ} + 4.orsvut)$$

et, en réunissant les différents groupes :

$$\text{vol. tronc} = \frac{H}{6}(B + b + 4b').$$

Théorème. — *Le centre de gravité du tronc polyédrique est le centre de trois forces parallèles appliquées aux centres de gravité de la base inférieure, de la base supérieure et de la section médiane, et respectivement proportionnelles à* B, b, 4b′.

Soit *(fig. 2)* α le centre de gravité du tétraèdre ACPQ,

β	celui du triangle		CPQ,
γ	—	—	*ort*,
δ	—	—	AMN,
ε	—	—	*rsv*,
ζ	celui du parallélogramme		*rvut*.

Il est aisé de reconnaître que ζ est aussi le centre de gravité du tétraèdre AMPQ. Car, le poids de ce tétraèdre étant remplacé par quatre forces égales appliquées en ses sommets, ces forces se ramènent à deux forces appliquées en r et u; etc.

Cela posé, et la densité du corps étant supposée égale à 1, le poids de ACPQ se ramène à une force égale à $\frac{H}{3}\cdot CPQ$, et appliquée en α. Comme d'ailleurs α est le milieu de la droite βγ, on peut remplacer cette force par deux autres appliquées en β et γ, la première égale à $\frac{H}{6}\cdot CPQ$ et la seconde égale à la première ou à $\frac{4H}{6}\cdot ort$, puisque $CPQ = 4ort$.

De même le poids du tétraèdre AMNQ sera remplacé par deux forces appliquées en δ et ε, et respectivement égales à $\frac{H}{6}\cdot AMN$ et à $\frac{4H}{6}\cdot rsv$.

Enfin le poids du tétraèdre AMPQ est égal à $\frac{4H}{6}\cdot rstu$; il est appliqué en ζ.

La même analyse étant appliquée aux divers groupes de tétraèdres qui composent le tronc, le poids de ce solide se trouvera remplacé par trois groupes de forces :

1° Des forces appliquées à la base inférieure, comme $\frac{H}{6}CPQ$

en β; elles ont pour somme $\frac{H}{6}$ B et pour centre le centre de gravité de la base, puisqu'elles sont proportionnelles aux triangles qui composent cette base et appliquées au centre de gravité de ces différents triangles;

2° Des forces analogues, appliquées à la base supérieure; leur résultante est appliquée au centre de gravité de cette base et égale à $\frac{H}{6}b$;

3° Des forces appliquées à la section médiane, comme $\frac{4H}{6}$ *ort* en γ, $\frac{4H}{6}$ *rsv* en ε, $\frac{4H}{6}$ *rvut* en ζ; leur résultante $\frac{4}{6}Hb'$ est appliquée au centre de gravité de la section.

Ainsi le poids du tronc peut être remplacé par trois forces appliquées aux centres de gravité des bases et de la section médiane et respectivement égales à $\frac{H}{6}B$, $\frac{H}{6}b$, $\frac{4H}{6}b'$, ou plus simplement proportionnelles à B, b, $4b'$.

Moment du tronc polyédrique par rapport aux plans des bases et au plan médian. — Le moment des trois forces ci-dessus, par rapport au plan de la base inférieure, est $\frac{H^2}{6}(b + 2b')$; par rapport au plan de la base supérieure: $\frac{H^2}{6}(B + 2b')$; par rapport au plan moyen : $\frac{4H^2}{6}(B - b)$.

Aucun de ces moments ne dépend, à la fois, de B, b et b', ni par conséquent du volume du tronc, résultat assez inattendu.

Distance du centre de gravité du tronc aux bases. — Soient X et Y les distances de ce point à la base inférieure et à la base supérieure; en égalant le moment du poids total aux valeurs déjà trouvées, nous avons :

$$\frac{H}{6}(B + b + 4b')X = \frac{H^2}{6}(b + 2b'),$$

$$\frac{H}{6}(B + b + 4b')Y = \frac{H^2}{6}(B + 2b^2);$$

et, en divisant :

$$\frac{X}{Y} = \frac{b + 2b'}{B + 2b'}.$$

(A suivre.)

ADDITION A L'ÉTUDE DU TRIFOLIUM

Par M. **H. Brocard.**

Les propriétés des circonférences passant par deux points P, S diamétralement opposés sur l'hyperbole équilatère (*Mémoire sur le Trifolium*, p. 40, fig. 19) peuvent être complétées par l'indication suivante :

Les points où les circonférences rencontrent la droite AOZ sont les sommets d'un rectangle dont une diagonale est MM′ et dont les côtés sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

C'est une application assez curieuse de la notion du *rectangle asymptotique*, employée pour la première fois par Bobillier, (*Ann. de Gergonne*, XIX, juin 1829. *Mém. sur l'hyp. éq.*, p. 358) et dont M. P.-H. Schoute a fait ressortir l'importance et l'utilité pour l'étude de l'hyperbole équilatère (*Ueber die Curv. 4e ordn. mit 3 Infl. Arch. de Grunest-Hoppe*, 1886 et *Bulletin des Sc. math.*, 1884, 278).

Ce *rectangle asymptotique* s'obtient en menant par deux points quelconques O, P de l'hyperbole équilatère, des parallèles aux asymptotes.

La seconde diagonale AB passe alors par le centre C de l'hyperbole.

On en conclut immédiatement la proposition suivante :

On donne deux droites rectangulaires OA, OB et un point C par lequel on mène des sécantes ACB. On trace la circonférence AOB ayant AB pour diamétre. Le lieu des points M, N d'intersection de cette circonférence par la corde MCN perpendiculaire à AB est l'hyperbole équilatère passant par les points M, N, O, P, dont le centre est C et dont les asymptotes sont parallèles aux droites OA, OB.

CONCOURS GÉNÉRAL

(23 mai 1892.)

Mathématiques spéciales.

Une quadrique Q est circonscrite à un ellipsoïde donné F.

A étant le pôle par rapport à l'ellipsoïde du plan P de la courbe de contact des deux surfaces :

1° Démontrer qu'en général il y a trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 homofocales avec E et telles que les plans polaires P_1, P_2, P_3 du point A par rapport aux surfaces Q_1, Q_2, Q_3, passent par le centre de Q.

2° Les plans P_1, P_2, P_3 sont les plans principaux de Q; et les coniques C_1, C_2, C_3 intersections des surfaces (P_1Q_1); (P_2Q_2); (P_3Q_3) sont les focales de cette quadrique.

3° Les projections orthogonales des coniques C_1, C_2, C_3 sur les plans principaux de E sont des coniques homofocales. En particulier, on projettera sur le plan principal contenant les axes majeur et moyen de l'ellipsoïde E. Chercher le lieu des foyers des coniques projetées, quand Q varie en restant circonscrite à E; le plan P de la courbe de contact ne changeant pas.

BIBLIOGRAPHIE

Traité de Géométrie analytique à trois dimensions, par G. Salmon : ouvrage traduit de l'anglais sur la quatrième édition, par O. Chemin, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées (Troisième partie, Gauthier-Villars et fils, 1892).

Cette troisième partie qui complète l'œuvre monumentale du géomètre anglais, comprend l'étude des *surfaces dérivées de quadriques*, celle des *surfaces du troisième et du quatrième degré*, et elle se termine par une exposition de la *théorie générale des surfaces*.

MM. Gauthier-Villars et fils qui ont poursuivi, avec une si louable persévérance ce grand travail, entrepris depuis longtemps, ont voulu que l'œuvre de Salmon, toute entière, fut traduite en français. Ils émettent, dans la préface, qui accompagne ce dernier volume, l'espoir que les ouvrages de Salmon occuperont, grâce à cette traduction, dans l'enseignement scientifique français, la place qu'ils méritent. Ils peuvent être, à cet égard, pleinement rassurés et l'espérance qu'ils manifestent correspond, heureusement, à un fait accompli depuis longtemps.

Cours de Mécanique analytique, par Ph. Gilbert, correspondant de l'Institut de France, professeur à l'Université de Louvain (3° édition, Gauthier-Villars, 1891).

Au moment où les programmes d'admission à l'École Polytechnique

se complètent par l'introduction, dans l'enseignement des Mathématiques spéciales, des premiers principes de la Mécanique, nous tenons à signaler à l'attention des professeurs l'ouvrage de M. Gilbert, le regretté géomètre, enlevé trop tôt à la science. Ils trouveront dans ce traité de Mécanique, avec de nombreux exercices, une exposition très bien faite des théories les plus récentes de cette science développée avec une extrême clarté, beaucoup de méthode et une grande érudition.

EXERCICE ÉCRIT

56. — On donne une hyperbole équilatère Γ et une circonférence (C) décrite sur une corde DD′ de cette hyperbole comme diamètre.

1° On mène dans la circonférence une corde perpendiculaire à DD′ : démontrer que la moitié de cette corde est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux points où elle rencontre l'hyperbole.

2° Indiquer dans quel cas les points d'intersection de la circonférence et de l'hyperbole sont réels.

3° Trouver le lieu des points de rencontre des sécantes communes à l'hyperbole et à la circonférence, lorsque la corde DD′ se déplace en restant parallèle à une direction fixe.

4° Soit H un des points communs à l'hyperbole (*) et au cercle mobile, A le point où la tangente à la circonférence en H coupe l'hyperbole, B le point où la tangente à l'hyperbole en H coupe la circonférence : prouver que la droite AB passe par un point fixe.

(*Ecole polytechnique*, concours du 28 mai 1892.)

Note sur l'exercice 55.

1° En désignant par α, β, les coordonnées du point M, les paraboles P, Q, en question, correspondent à l'équation

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y \pm \frac{abc^2}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0,$$

dans laquelle on prend, successivement, le signe +, puis le signe —. On observera, pour faciliter les calculs, que l'équation de P se déduit de celle de Q par le changement de a en $-a$.

(*) Il fallait ajouter, croyons-nous, pour éviter toute confusion, *autre que les points* D, D′.

On trouve alors, facilement,

$$p^2 = a^4b^4\,\frac{(a\alpha + b\beta)^2}{c^4(a^2+b^2)^3}, \qquad p'^2 = a^4b^4\,\frac{(b\beta - a\alpha)^2}{c^4(a^2+b^2)^3};$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad p^2 - p'^2 = \frac{4a^5b^5\alpha\beta}{c^4(a+b^2)^3}.$$

Pour l'hyperbole H, l'équation

$$\left(x - \frac{a^2\alpha}{c^2}\right)\left(y + \frac{b^2\beta}{c^2}\right) + \frac{a^2b^2\alpha\beta}{c^4} = 0,$$

prouve que le carré m^2 de l'axe transverse est donné par la formule

$$m^2 = \left|\frac{2a^2b^2\alpha\beta}{c^4}\right|. \qquad (2)$$

Des égalités (1), (2), on conclut

$$\left|\frac{p^2 - p'^2}{m^2}\right| = \frac{2a^3b^3}{(a^2+b^2)^3}.$$

2° Les équations des axes des paraboles (P), (Q) sont

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{b^3\beta - a^3\alpha}{c^2(a^2+b^2)} = 0,$$

$$-\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{b^3\beta + a^3\alpha}{c^2(a^2+b^2)} = 0.$$

Les points (α, β) (x, y) se correspondent donc homographiquement.

3° Les formules précédentes prouvent que les droites correspondantes sont deux cordes isoscéliennes de l'ellipse proposée; elles coupent donc cette ellipse en quatre points situés sur une circonférence Γ.

a) On trouve facilement que l'équation de Γ est

$$\left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{b^3\beta - a^3\alpha}{c^2(a^2+b^2)}\right]\left[-\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{b^3\beta + a^3\alpha}{c^2(a^2+b^2)}\right] - \frac{a^2+b^2}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Si Γ passe par le centre de E, le point M (α, β) décrit l'hyperbole correspondant à l'équation

$$b^6y^2 - a^6x^2 + c^2(a^2+b^2)^3 = 0.$$

b) Si Γ a un rayon constant R, le lieu de M est une ellipse (réelle ou imaginaire) représentée par

$$\frac{a^4x^2 + b^4y^2}{4c^2(a^2+b^2)} + \frac{a^2+b^2}{2} = R^2.$$

4° Enfin, si l'on observe que les coordonnées x_0, y_0 du centre de Γ sont données par les formules

$$2x_0 = \frac{a^2\alpha}{a^2+b^2}, \qquad 2y_0 = \frac{b^2\beta}{a^2+b^2},$$

On voit que les points (x_0, y_0), (α, β) se correspondent homographiquement.

QUESTIONS D'EXAMENS (*)

1. — *Discuter, par les méthodes du contour apparent, le genre de la surface qui correspond à l'équation*

(1) $a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1$ (**).

Prenons le contour apparent sur le plan de xy.

Le cylindre qui détermine ce contour apparent est représenté par

(2) $x^2(b^2 - ac) + y^2(a^2 - bc) + 2xy(ab - c^2) + c = 0,$

équation obtenue en écrivant que (1), considérée comme une équation en z, a une racine double. Formons le critère θ du genre de la conique (2). Nous avons

$$\theta = (b^2 - ac)(a^2 - bc) - (ab - c^2)^2$$

ou $$\theta = -c(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

La seconde parenthèse $a^2 + \dots$ n'est nulle que si l'on suppose $a = b = c$; dans ce cas, (1) représente deux plans parallèles.

Si $a + b + c = 0$, le contour apparent est formé de deux droites parallèles; la surface proposée est un cylindre (***).

Dans le cas général, $a + b + c \neq 0$, on doit distinguer les quatre hypothèses suivants :

$$c > 0, \quad a + b + c > 0, \quad \theta < 0,$$
$$c > 0, \quad a + b + c < 0, \quad \theta > 0,$$
$$c < 0, \quad a + b + c > 0, \quad \theta > 0,$$
$$c < 0, \quad a + b + c < 0, \quad \theta < 0,$$

Dans le premier cas, le contour apparent est *hyperbolique*, et l'axe ($x = 0, y = 0$) du cylindre circonscrit à la surface, coupe la quadrique en des *points réels*. La surface est un hyperboloïde à une nappe.

En continuant la discussion, dans les trois autres hypothèses, aboutit à ce résultat : *la surface est un hyperboloïde à une nappe, ou à deux nappes; suivant que* $a + b + c$ *est positif ou négatif.*

Il faut pourtant observer, c'est le point délicat dans cette discussion, que, si l'on suppose

(3) $$c > 0, \quad a + b + c < 0, \quad \theta > 0$$

le contour apparent est *elliptique* mais *imaginaire*, ce qui correspond à l'hyperboloïde à deux nappes.

En effet, les inégalités (3) prouvent que a, b *ne peuvent pas être positifs simultanément.*

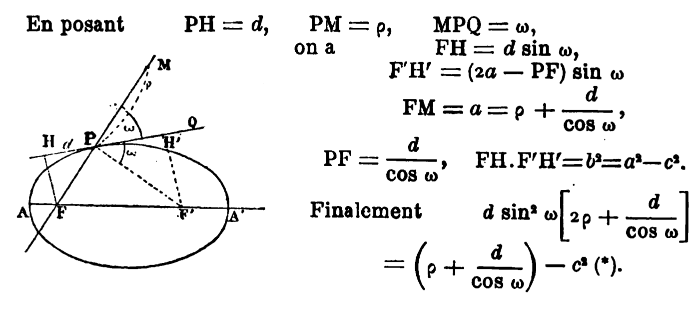
En supposant $a < 0$, par exemple, $b^2 - ac$ est positif et l'équation (2) montre que le diamètre Ox rencontre l'ellipse en des points imaginaires; donc cette ellipse est imaginaire.

(*) Énoncés empruntés à la collection Croville-Morant (Examens de l'École polytechnique, 1891).

(**) Cette équation se trouve discutée, par la méthode de l'équation en S, dans notre *G. A.*, p. 378.

(***) On peut reconnaître que ce cylindre est hyperbolique et équilatère. V. *loc. cit.*)

2. — *Une ellipse se déforme en étant assujettie 1° à rester tangente, en* P, *à la droite* PQ; *2° à garder une distance focale constante; 3° à ce que l'un de ses foyers* F *se projette sur* PQ *en un point fixe* H. *On prend, sur la droite* FP, *une longueur* FM = a, a *étant la longueur du demi-grand axe (qui est variable). On demande le lieu du point* M.



En posant $PH = d$, $PM = \rho$, $MPQ = \omega$, on a

$$FH = d \sin \omega,$$

$$F'H' = (2a - PF) \sin \omega$$

$$FM = a = \rho + \frac{d}{\cos \omega},$$

$$PF = \frac{d}{\cos \omega}, \quad FH.F'H' = b^2 = a^2 - c^2.$$

Finalement

$$d \sin^2 \omega \left[2\rho + \frac{d}{\cos \omega} \right] = \left(\rho + \frac{d}{\cos \omega} \right) - c^2 \text{ (*)}.$$

QUESTION 298

Solution par M. PHILASTRE.

Un déterminant Δ, *de l'ordre* n, *a pour éléments de la diagonale principale les nombres* $a_1, a_2, \ldots a_n$; *tous les autres éléments étant égaux à* x. *Démontrer que ce déterminant, égalé à zéro, représente une équation du degré* n *ayant toutes ses racines réelles, ou toutes ses racines réelles moins deux* (**). (G. L.)

1° Ajoutons, aux éléments de chacune des $n - 1$ premières colonnes, les éléments de la n^{me} multipliés par -1.

2° Ajoutons ensuite aux éléments de chaque ligne jusqu'à la $(n-2)^{me}$ inclusivement, les éléments de la ligne suivante multipliés par -1.

3° Développons la dernière forme obtenue; nous aurons :

(*) L'équation indiquée *(Collection Croville-Morant)* paraît inexacte. On y donne comme résultat :

$$\rho^2 + 2d\rho \cos \omega + d^2 - c^2 = 0,$$

équation représentant une circonférence.

(**) Énoncé rectifié.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & x \cdots & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2} & x & x \\ x & \cdots & \cdots & x & a_{n-1} & x \\ x & x & x \cdots & x & x & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & 0 & a_3-x & 0 \cdots & 0 & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2}-x & 0 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1}-x & x \\ x-a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1-x & x-a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2-x & x-a_3 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3-x & x-a_4 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2}-x & x-a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1}-x & x \\ x-a_n & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1-x) \begin{vmatrix} a_2-x & x-a_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3-x & x-a_4 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_4-x & x-a_5 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2}-x & x-a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1}-x & x \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$+(-1)(x-a_2) \begin{vmatrix} 0 & x-a_3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3-x & x-a_4 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_4-x & x-a_5 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & a_{n-2}-x & x-a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1}-x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x-a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

ou bien, en développant et égalant à zéro,

$$\left\{\begin{array}{l}(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x) \ldots (a_{n-2} - x)(a_{n-1} - x)a_n \\ + (-1)(x - a_2)(-1)^{n-2}(x - a_4)(x - a_3) \ldots \\ (x - a_{n-2})(x - a_{n-1})x = 0.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x) \ldots (a_{n-2} - x)(a_{n-1} - x)a_n \\ + (-1)(-1)^{n-2}(-1)^{n-1}(a_2 - x)(a_3 - x) \ldots \\ (a_{n-2} - x)(a_{n-1} - x)(a_n - x)x = 0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x) \ldots (a_{n-2} - x)(a_{n-1} - x)a_n \\ + (-1)^{2n-2}(a_2 - x)(a_3 - x) \ldots \\ (a_{n-2} - x)(a_{n-1} - x)a_n - x)x = 0.\end{array}\right.$$

Enfin

$$(a_2-x)(a_3-x)(a_4-x)\ldots(a_{n-1}-x)[(a_{n-1}-x)a_n + (a_n-x)x] = 0,$$

$$(a_2 - x)(a_3 - x)(a_4 - x) \ldots (a_{n-1} - x)[a_1a_n - x^2] = 0.$$

Le premier membre contient $(n - 2)$ facteurs binômes qui donnent tous des racines réelles et un dernier facteur qui admet deux racines réelles, à la seule condition que a_1 et a_n soient de même signe.

QUESTION PROPOSÉE

354. — On donne une circonférence et trois droites qui ne la rencontrent pas. Construire les foyers d'une conique tangente à ces trois droites et bi-tangente à la circonférence.

(A. Tissot.)

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 11160-5-92.

SUR UNE CORRESPONDANCE

ENTRE LES FORMES CUBIQUES BINAIRES ET LES POINTS DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

Par **M. R. Le Vavasseur**, professeur de mathématiques spéciales
au Lycée de Moulins.

1. — Considérons le plan (Λ) dont l'équation est

$$x - 3\lambda y + 3\lambda^2 z - \lambda^3 = 0.$$

Ce plan enveloppe une surface développable $(\mathfrak{R})$. Une génératrice quelconque de cette surface développable a pour équations

$$\begin{cases} 2\lambda z - y = \lambda^2, \\ x - 3\lambda^2 z = -2\lambda^3, \\ 3\lambda^2 y - 2\lambda x = \lambda^4. \end{cases}$$

Elle fait partie d'un complexe linéaire $(\mathfrak{L})$ dont l'équation est $a = 3l$, (a, b, c, l, m, n étant les coordonnées pluckériennes de la génératrice).

Les parallèles aux génératrices de la surface $(\mathfrak{R})$ menées par l'origine sont sur un cône du second degré $(\mathfrak{C})$ dont l'équation est $3y^2 = 4zx$.

Le plan (Λ) *est osculateur à une cubique gauche* $(\mathfrak{C})$. Les coordonnées d'un point de cette cubique sont

$$\begin{cases} x = \lambda^3, \\ y = \lambda^2, \\ z = \lambda. \end{cases}$$

Elle est située

1° sur le cône $\quad + p = -y^2 + zx = 0$

2° sur le cylindre $\quad q = y - z^2 = 0$

3° sur le paraboloïde $\quad r = yz - x = 0.$

2. — Dans le complexe linéaire $(\mathfrak{L})$, le plan qui a pour foyer le point (x_0, z_0, y_0), a pour équation

$$x - 3z_0 y + 3y_0 z - x_0 = 0;$$

ainsi le plan qui a pour foyer un point λ de la cubique gauche (C) aura pour équation $x - 3\lambda y + 3\lambda^2 z - \lambda^3 = 0$. *C'est le plan osculateur en λ à la cubique* (C).

3. — Une forme cubique binaire pourra toujours être mise sous la forme $\lambda^3 - 3\gamma\lambda^2 + 3\beta\lambda - \alpha = 0$ (1). Je lui ferai correspondre dans l'espace le point a (α, β, γ).

Soient $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ les racines de l'équation (1).

Le plan qui a pour foyer le point λ' de la cubique (C) a pour équation $x - 3\lambda' y + 3\lambda'^2 z - \lambda'^3 = 0$; il passe par le point a (α, β, γ).

Ainsi le point a (α, β, γ) *est à l'intersection des trois plans osculateurs* $\Lambda', \Lambda'', \Lambda'''$ *aux points* $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ *de la cubique* (C).

Le plan A, qui a pour foyer a, est représenté par l'équation

$$x - 3\gamma y + 3\beta z - \alpha = 0;$$

il passe donc par les trois points $\lambda', \lambda'', \lambda'''$.

4. — A deux points λ, et μ, situés sur la cubique (C), je ferai correspondre la droite conjuguée de la droite $(\lambda\mu)$ par rapport au complexe linéaire ($\mathfrak{L}$).

Ses équations sont :

$$\begin{cases} x - 3\lambda y + 3\lambda^2 z - \lambda^3 = 0, \\ x - 3\mu y + 3\mu^2 z - \mu^3 = 0. \end{cases}$$

Ses coordonnées pluckériennes :

$$\begin{cases} \rho a = 3\lambda\mu & \rho l = \frac{1}{3}(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) \\ \rho b = \lambda + \mu & \rho m = -(\lambda + \mu) \\ \rho c = 1 & \rho n = \lambda^2\mu^2. \end{cases}$$

Elle fait partie d'une congruence.

Par un point de l'espace passent trois droites de la congruence, en général distinctes, Pour qu'il y ait deux droites confondues, il faut que le point (x, y, z) d'où elles partent soit situé sur la surface (R), développable engendrée par les tangentes à la cubique (C), et dont l'équation est

$$(x - yz)^2 - 4(zx - y^2)(y - z^2) = r^2 - 4pq = 0.$$

Elles seront toutes les trois confondues, si le point (x, y, z) est sur la cubique (C).

La surface ($\mathfrak{R}$) *est la surface focale de la congruence;* chacune des droites est bitangente à la surface ($\mathfrak{R}$); les coordon-

nées des points de contact, ou points focaux, s'expriment *rationnellement* en λ et μ.

On trouve, pour le premier point focal :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \lambda^2\mu, \\ y &= \frac{1}{3}\lambda(\lambda + 2\mu), \\ z &= \frac{1}{3}(2\lambda + \mu), \end{aligned}\right.$$

et pour le second point focal :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \lambda\mu^2, \\ y &= \frac{1}{3}\mu(\mu + 2\lambda), \\ z &= \frac{1}{3}(2\mu + \lambda). \end{aligned}\right.$$

(A suivre.)

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UNE FORME QUADRATIQUE

EN UN PRODUIT DE DEUX FACTEURS LINÉAIRES

Par **G. Méténier**, professeur au Collège de Saint-Flour.

(*Suite*, voir. p. 125.)

---

7. — D'après le théorème précédent, nous n'avons plus à nous occuper que du cas où les trois équations formées en annulant les trois mineurs principaux ont toutes trois leurs racines réelles et inégales. Prenons par exemple l'équation $\Delta_a = 0$, et supposons ses racines réelles et inégales. Deux cas peuvent se présenter, si l'équation en λ n'a pas de racines multiples.

1° *L'équation* $\Delta(\lambda) = 0$ *a une seule racine réelle, les deux autres étant imaginaires.* — Nous savons que les racines imaginaires donnent nécessairement deux couples imaginaires. D'après le théorème établi dans le paragraphe précédent, la racine réelle donnera nécessairement un couple réel. Les deux

racines imaginaires de l'équation en λ sont imaginaires conjuguées. Par conséquent si

$$M + iN = o, \quad P + iQ = o$$

sont les équations des droites d'un couple correspondant à l'une de ces racines

$$M - iN = o, \quad P - iQ = o$$

seront les équations des droites de l'autre couple correspondant à la racine imaginaire conjuguée. Ces deux couples ont en commun les points réels $(M = o,\ N = o)$ et $(P = o,\ Q = o)$. Les coniques se coupent donc en deux points réels.

2° *L'équation* $\Delta(\lambda) = o$ *a toutes ses racines réelles.* — Nous savons que l'une des racines donne nécessairement un couple de sécantes réelles. Pour savoir ce que donnent les deux autres racines, on pourra diriger la discussion de la manière suivante. Soit α une racine réelle de l'équation $\Delta(\lambda) = o$. Portons cette valeur dans Δ_a que nous écrirons, pour la circonstance, $\Delta_a(\lambda)$. Le résultat de cette substitution sera $\Delta_a(\alpha)$, et en le désignant par μ nous aurons : $\Delta_a(\alpha) = \mu$. Les équations.

$$\Delta(\lambda) = o \quad \text{et} \quad \Delta_a(\lambda) - \mu = o$$

auront une racine commune α; on aura toutes les valeurs de μ correspondant aux diverses valeurs de α, en prenant le résultant de ces deux équations. On trouve ainsi une équation du troisième degré en μ que nous désignerons par $H(\mu) = o$. Cette équation a nécessairement autant de racines réelles que l'équation $\Delta(\lambda) = o$ elle-même. Les trois couples de sécantes seront évidemment réels si l'équation $H(\mu) = o$ a ses trois racines négatives.

Si elle n'a qu'une racine négative, il n'y a qu'un couple réel. On doit remarquer que l'application de la règle de Descartes, à l'équation $H(\mu) = o$, fournira immédiatement la réponse à la question proposée, en sorte qu'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'équation en* λ *a ses trois racines réelles, et que les équations formées en égalant à zéro chacun des trois mineurs principaux de* $\Delta(\lambda)$ *aient aussi leurs racines réelles, les trois couples de sécantes sont réels si l'équation* $H(\mu) = o$ *n'a que des permanences. Dans le cas contraire, un seul couple est réel.*

On doit remarquer que deux racines réelles de l'équation en λ donnent nécessairement deux couples distincts. Soient en effet λ_1 et λ_2 ces deux racines. Si les couples $f - \lambda_1 f_1 = 0$ et $f - \lambda_2 f_1 = 0$ n'étaient pas distincts on aurait l'identité: $f - \lambda_1 f_1 \equiv k(f - \lambda_2 f_1)$ et on reconnaît immédiatement que cela ne peut arriver que si les deux coniques coïncident, ce qu'on ne suppose pas.

Les couples $f - \lambda_1 f_1 = 0$ et $f - \lambda_2 f_1 = 0$ étant distincts, ne sont pas non plus imaginaires conjugués. Il résulte en effet, des équations (10), de deux sécantes d'un même couple, que si λ étant réelle, ce couple est imaginaire, ses deux droites sont conjuguées.

Si donc une droite du couple (λ_2) était conjuguée d'une droite du couple (λ_1), elle appartiendrait à ce couple, et les deux couples ne seraient pas distincts, ce qui est impossible.

Il résulte de là que si les trois couples des sécantes sont réels les coniques se coupent en quatre points réels; si un seul couple est réel, les coniques se coupent en quatre points imaginaires.

Il nous reste à faire l'examen des cas où l'équation en λ admet des racines multiples.

8. — 1° *Supposons que* $\Delta(\lambda) = 0$ *ait une racine double.* — On a vu que le centre du couple double est situé sur les coniques. Elles sont donc tangentes en ce point. Le point de contact sera donné par les équations (11). Les sécantes communes, qui correspondent à la racine simple de $\Delta(\lambda) = 0$, sont la tangente commune au point de contact, et la droite qui joint les deux autres points communs à ces coniques.

2° *La racine double de l'équation en* λ *annule tous les mineurs de* $\Delta(\lambda)$. — Les formules (10), dans lesquelles les radicaux disparaissent pour la racine double, montrent que les deux sécantes doubles du cas précédent ne sont pas distinctes; les deux coniques sont bitangentes, et les deux tangentes communes. en leurs points de contact, correspondent à la racine simple de l'équation en λ.

3° *L'équation en* λ *une racine triple.* — Alors les trois couples de sécantes ne forment plus qu'un seul couple. Les deux coni-

ques ont trois points confondus en un seul, est donné par les équations (11), et se coupent en un quatrième point.

4° *La racine triple de* $\Delta(\lambda) = 0$ *annule tous les mineurs de* $\Delta(\lambda)$. Les formules (10), dans lesquelles les radicaux disparaissent montrent que les deux sécantes du cas précédent coïncident. Les quatre points communs sont venus se confondre en un seul, donné par les équations (11), et les deux coniques sont *osculatrices* en ce point.

Applications. — 1° *Soient les coniques représentés par :*

$$x^2 - 2y^2 + 2xy - 4x - 4y + 1 = 0,$$
$$2x^2 - y^2 - 8xy + 6x + 4y - 1 = 0.$$

L'équation en λ est :

$$\Delta(\lambda) = 29\lambda^3 + 121\lambda^2 + 94\lambda + 8 = 0.$$

On reconnaît facilement qu'elle a ses trois racines réelles.

On a ensuite : $\Delta_a = -(3\lambda^2 + 13\lambda + 11)$,

$$\Delta_{a'} = -(11\lambda^2 + 13\lambda + 3),$$
$$\Delta_d = -(18\lambda^2 + 3\lambda + 3).$$

L'équation $\Delta_d = 0$ a ses racines imaginaires. Donc Δ_d est constamment négatif et les trois couples de sécantes sont réels. Les coniques se coupent en quatre points réels.

2° *Soient :* $4x^2 + 5y^2 - 10xy - 4x - 2y - 1 = 0$,

$$5x^2 + y^2 - 2xy + 1 = 0.$$

L'équation en λ est :

$$\Delta(\lambda) = 4\lambda^3 - 15\lambda^2 - 37\lambda + 39 = 0;$$

elle a ses trois racines réelles.

On a :

$$\Delta_a = \lambda^2 - 4\lambda - 6,$$
$$\Delta_{a'} = 5\lambda^2 + \lambda - 8,$$
$$\Delta_d = 4\lambda^2 - 19\lambda - 5.$$

Les équations $\Delta_a = 0$, $\Delta_{a'} = 0$, $\Delta_d = 0$ ont donc, toutes trois, leurs racines réelles. Il faut former l'équation $H(\mu) = 0$. On considère $\Delta(\lambda) = 0$, $\Delta_a - \mu = 0$ et l'on élimine λ entre ces deux équations.

On trouve :

$$H(\mu) = 16\mu^3 + 7\mu^2 - 1125\mu + 81 = 0.$$

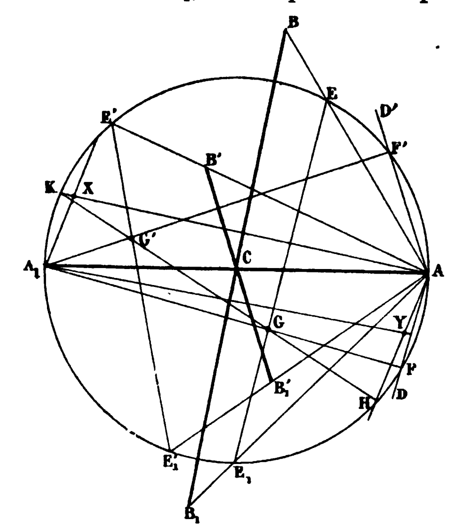
Le premier membre de cette équation présente des variations. Donc un seul couple est réel, et les coniques se coupent en quatre points imaginaires. *(A suivre.)*

SUR LE PROBLÈME DE CHASLES

Par Mme Ve **F. Prime**, à Bruxelles.

Il y a quelque temps j'ai indiqué (*Mathesis*, janvier 1891), *la construction des axes de symétrie d'une ellipse déterminée par un système de diamètres conjugués*. Voici une autre construction qui, nous le pensons bien, est aussi inédite.

Soient AA_1, BB_1, les diamètres donnés et C leur point de rencontre. Les droites qui joignent le point A aux extrémités des diamètres de l'ellipse, constituent un faisceau en involution φ, déterminé par les deux couples de rayons homologues AB, AB_1 ; AA_1 et la parallèle AD à BB_1, menée par A. Chaque couple de rayons homologues du faisceau φ étant parallèle à un système de diamètres conjugués de l'ellipse, il suffira, pour obtenir la direction des axes de symétrie, de construire le couple des rayons homologues rectangulaires.



A cet effet, sur AA_1 comme diamètre, décrivons une circonférence : cette circonférence coupe AB en E, AB_1 en E_1 et AD en F. Menons les droites EE_1, A_1F et soit G leur point d'intersection (*); la droite GC rencon-

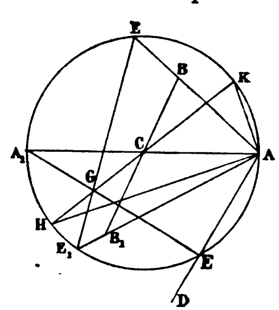
(*) G pourrait s'appeler le Point de Frégier.

trant la circonférence AA_1 aux points H,K; AK, AH sont les directions des axes de symétrie. Ces directions connues, on achève la construction par le procédé indiqué dans *Mathesis*.

Les considérations précédentes, généralisées, conduisent à la question suivante :

AA_1, BB_1 *sont deux diamètres conjugués d'une ellipse* E; AA_1, $B'B'_1$, *deux diamètres conjugués d'une seconde ellipse* E'; AA_1 *étant ainsi un diamètre commun aux ellipses* E, E', *on demande les points d'intersection de ces ellipses.*

Menons AD parallèlement à BB_1, AD' parallèlement à $B'B'_1$. Dans l'ellipse E, le point A est le sommet d'un faisceau en involution φ, dont AB, AB_1; AA_1, AD sont deux couples de rayons homologues; et, dans l'ellipse E', A est le sommet d'un second faisceau en involution φ', déterminé par les deux couples des rayons homologues AB', AB'_1; AA_1, AD'.



Les points d'intersection des ellipses E, E' étant situés aux extrémités d'un même diamètre, il faut chercher les rayons conjugués, communs aux faisceaux φ, φ'.

Déterminons les points de Frégier, G, G', des faisceaux φ, φ' relativement à la circonférence décrite sur AA_1 comme diamètre. La droite GG' coupe la circonférence AA_1 aux points H, K; traçons les droites AH, AK; et, par A_1, menons-leur des parallèles. Nous construisons ainsi un parallélogramme AXA_1Y dont les sommets X, Y sont les points d'intersection des ellipses E, E'.

N. B. — Si l'une des ellipses, E' par exemple, était remplacée par une hyperbole admettant AA_1 pour diamètre transverse et $B'B'_1$ pour diamètre imaginaire, le faisceau φ' serait déterminé par les rayons homologues AA_1, AD', et par le rayon double AB' (ou AB'_1).

NOTE SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ
DES SOLIDES A LA MESURE DESQUELS EST APPLICABLE LA *RÈGLE DES TROIS NIVEAUX*

Par M. **Frétille**, ancien élève de l'École Polytechnique,
principal du Collège de Bône.

(*Suite*, voir page 132.)

EXTENSION DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS AU TRONC DE SURFACE RÉGLÉE

Lemme. — *Une surface réglée peut être considérée, au double point de vue de* L'AIRE DE SES SECTIONS ET DU VOLUME D'UN SOLIDE QU'ELLE LIMITE *comme la limite de la surface latérale d'un tronc polyédrique.*

Démontrons cette propriété d'abord pour l'aire des sections. Soient (*fig.* 1) AC, BD deux segments de génératrices infiniment voisines. Je mène AD, et je dis qu'on peut remplacer, au point de vue considéré, la surface courbe ABCD par l'ensemble des triangles plans ACD, ABD. Soit, en effet, un plan qui coupe la surface suivant une courbe dont rqt est un élément, et les droites AC, AD, BD, en r, s, t. AC, BD étant infiniment voisines, les droites AB, CD, rs, st, rt, sont infiniment petites d'un même ordre, que j'appelle le premier. Si donc on mesure la section à l'aide des coordonnées polaires, par exemple,

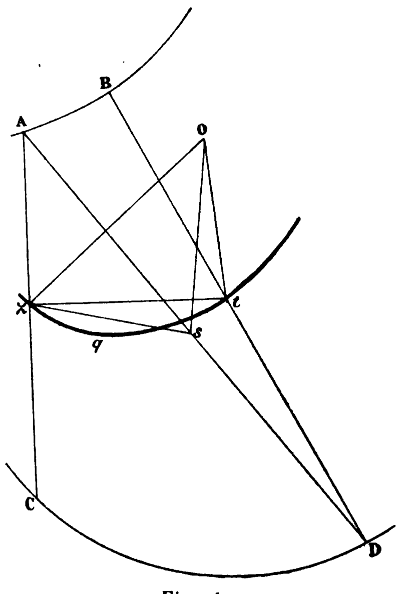


Fig. 1.

en prenant pour pôle le point o pris sur le plan, le triangle ort sera infiniment petit du même ordre que rt, c'est-à-dire du premier. Et on pourra, comme on sait, négliger en présence de ort le segment rqt, d'ordre supérieur. D'ailleurs le triangle rst a deux côtés infiniment petits. Il est donc infiniment petit du second ordre, et négligeable par rapport à ort. Nous pouvons donc, dans la mesure de l'aire considérée, substituer la ligne brisée rst à la droite rt, substituée elle-même à l'arc rqt.

Ce lemme étant démontré, pour les aires des sections, il est aisé de l'étendre aux volumes. Car, pour mesurer le volume limité par la surface courbe, nous ferions la somme de cylindres élémentaires tels que celui qui a pour base la section rqt..., et une hauteur infiniment petite. Or, à ce cylindre, nous pouvons substituer le prisme de même hauteur qui a pour base le polygone rt..., puis celui qui a pour base le polygone rst..., en n'altérant son volume que de quantités infiniment petites par rapport à lui et par conséquent négligeables.

Remarque. — Au point de vue de la longueur de la courbe de section, la surface réglée (à moins d'être développable) n'est pas limite de la surface du tronc polyédrique. Car, l'angle rst ne tendant pas vers 180°, on ne peut pas dire que

$$\lim \frac{rs + st}{rt} = 1.$$

L'aire de la surface réglée, si cette surface est gauche, n'est pas non plus limite de la surface du tronc polyédrique. Ce lemme permet de reconnaître comme évidente la proposition suivante :

Théorème. — *Tout ce que nous avons démontré pour le tronc polyédrique s'applique au tronc de surface réglée.*

Remarque. — Si la surface courbe du tronc ne se ferme pas d'elle-même, elle doit être limitée latéralement par deux génératrices, de telle sorte que toute génératrice partant d'une base aille jusqu'à l'autre. Ainsi le lemme ci-dessus ne s'appliquerait pas au segment d'hyperboloïde à une nappe représenté (*fig.* 2). Mais si (*fig.* 3) nous limitons par deux

génératrices d'un même système AB, CD, une portion d'hyperboloïde comprise entre deux plans parallèles, et si nous

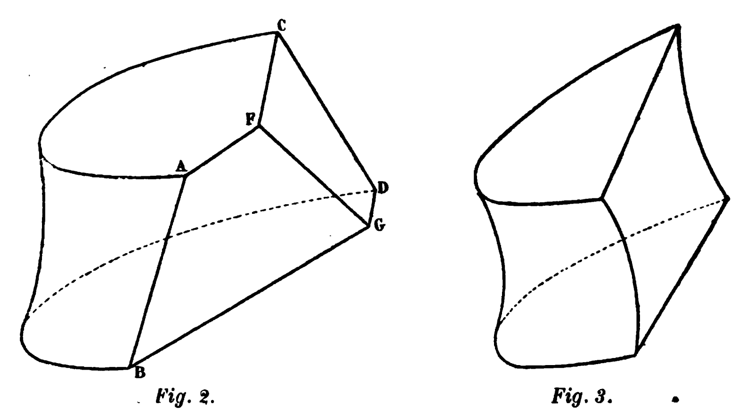


Fig. 2. *Fig. 3.*

menons par AB et CD deux plans qui se coupent suivant FG, le volume ainsi limité sera bien limite d'un tronc polyédrique, et nos théorèmes seront applicables.

(A suivre).

SUR LA CUBIQUE GAUCHE

QUI PASSE PAR LES POINTS D'INCIDENCE DES NORMALES A UNE QUADRIQUE ISSUES D'UN POINT (*)

Par M. **Drin**, élève de mathématiques spéciales au Lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

On sait que, par un point P, extérieur à une quadrique à centre, on peut mener six normales à la surface, et que les points d'incidence de ces six normales sont situés sur une cubique gauche Γ. Cette cubique gauche a de nombreuses analogies avec l'hyperbole d'Apollonius, relative aux normales à une conique, issues d'un point; c'est ainsi que cette cubique passe par le centre de la surface, par le point P, par les

(*) Sur ce même sujet, voyez la note publiée (*Journal* 1887, p. 169).

points à l'infini sur les axes, et reste invariable lorsque la quadrique considérée se déforme en restant concentrique et homothétique à elle-même.

1. — Nous nous proposons d'indiquer ici quelques autres analogies.

On sait : (Chasles. *Traité des sections coniques*, p. 142), que *si, d'un point fixe* P, *on abaisse une perpendiculaire sur chaque diamètre d'une conique, et qu'on prenne le point d'intersection de cette droite et du diamètre conjugué, le lieu de ce point est l'hyperbole d'Apollonius, relative au point* P.

Cette propriété peut encore s'énoncer de la façon suivante :

L'hyperbole d'Apollonius, relative à un point P, *est le lieu d'un point* M *tel, que la polaire du point* M, *par rapport à la conique correspondante, soit perpendiculaire sur la droite* PM.

Je dis que, dans l'espace, *la cubique gauche* Γ, *relative à un point* P, *est le lieu d'un point* M, *tel que le plan polaire de* M, *par rapport à la quadrique correspondante, soit perpendiculaire sur la droite* PM.

Nous ferons la démonstration dans le cas d'un ellipsoïde rapporté à ses axes.

Soient (α, β, γ) les coordonnées de P.

L'équation de l'ellipsoïde est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du point M.

Les équations de la perpendiculaire abaissée du point M sur le plan polaire de ce point, par rapport è l'ellipsoïde, sont :

$$\frac{X - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{Y - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{Z - z_0}{\frac{z_0}{c^2}}$$

Écrivons que cette droite passe par le point P : nous aurons, en égalant à λ les rapports communs,

$$\frac{a^2(\alpha - x_0)}{x_0} = \frac{b^2(\beta - y_0)}{y_0} = \frac{c^2(\gamma - z_0)}{z_0} = \lambda ;$$

Donc :
$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= \frac{a^2\alpha}{a^2+\lambda} \\ y_0 &= \frac{b^2\beta}{b^2+\lambda} \\ z_0 &= \frac{c^2\gamma}{c^2+\lambda} \end{aligned}\right.$$

Si l'on regarde x_0, y_0, z_0 comme des coordonnées courantes, on reconnaît les équations, sous la forme unicursale, de la cubique gauche Γ.

2. — Il est d'ailleurs facile de voir pourquoi le lieu géométrique, ainsi défini, passe par les pieds des normales à la quadrique, issues de P. Soit en effet PN une de ces normales; le plan polaire du point N est le plan tangent à la quadrique en ce point. Mais ce plan est, par hypothèse, perpendiculaire sur PN; donc le point N appartient au lieu.

Si l'on considère la parallèle, à l'un des axes de la quadrique, menée par le point P, et le point à l'infini sur cette parallèle, ce point appartient également au lieu parce que son plan polaire n'est autre que le plan principal perpendiculaire sur cette parallèle.

3. — *Autre mode de génération de la cubique gauche.*

Étant donnés une conique et un point fixe P, l'hyperbole d'Apollonius, relative à cette conique et à ce point, est aussi le lieu des milieux des cordes que des cercles décrits du point donné, comme centre, interceptent dans la conique proposée. (Chasles. S. C. P. 144).

La propriété analogue, dans l'espace, est celle-ci :

Étant donnée une quadrique S et un point fixe P, la cubique aux pieds des normales, relative à cette quadrique (S) et à ce point, est aussi le lieu des centres des quadriques qui passent par l'intersection de la quadrique (S) et d'une sphère variable, de centre P.

L'équation de la quadrique (S) est, en supposant que cette quadrique soit un ellipsoïde :

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

l'équation d'une sphère Σ :

$$\Sigma \equiv \frac{(x-\alpha)^2}{R^2} + \frac{(y-\beta)^2}{R^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{R^2} - 1 = 0.$$

L'équation générale des quadriques passant par l'intersection de (S) et de (Σ) est :

$$S + \lambda\Sigma = 0.$$

Les coordonnées du centre d'une de ces quadriques vérifient les équations :

$$\frac{x}{a^2} + \lambda\frac{(x-\alpha)}{R^2} = 0,$$

$$\frac{y}{b^2} + \lambda\frac{(y-\beta)}{R^2} = 0,$$

$$\frac{z}{c^2} + \lambda\frac{(z-\gamma)}{R^2} = 0.$$

D'où en posant : $\dfrac{R^2}{\lambda} = \mu$:

$$\left\{\begin{aligned} z &= \frac{c^2+\mu}{c^2\gamma}, \\ y &= \frac{b^2+\mu}{b^2\beta}, \\ x &= \frac{a^2+\mu}{a^2\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Ce sont les équations de la cubique gauche.

Le sommet d'un cône étant le centre de ce cône, on voit que, en particulier, le lieu trouvé précédemment peut également se définir comme le lieu des sommets des cônes du deuxième degré, qui passent par l'intersection de (S) et de (Σ).

4. — On comprend aisément pourquoi les pieds des normales à la surface (S), issues de P, sont des points du lieu.

Soit, en effet, PN une de ces normales. La sphère (Σ_1) de centre P et de rayon PN, coupe l'ellipsoïde (S) suivant une courbe du quatrième degré, qui admet le point N pour point double. Ce point N est le sommet d'un cône du second degré passant par les points de rencontre de (S) et de (Σ_1); donc le point N appartient au lieu défini. *(A suivre.)*

SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE
DANS SON PLAN

Par M. **Balitrand**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir page 121.)

Note 1. — La formule

$$\rho = \frac{r^2}{MN} \tag{8}$$

permet de construire le centre de courbure de la trajectoire d'un point quelconque M, quand on connaît le cercle des inflexions.

Prenons par exemple un cercle roulant sur une droite X′X; un point quelconque M du cercle décrit une cycloïde. Le centre instantané de rotation est en I, et le cercle des inflexions est le cercle décrit sur IO comme diamètre, puisque le point O décrit une droite. On a

$$\rho = \frac{\overline{IM}^2}{MN} = 2IM.$$

Fig. 1.

Prenons encore une droite AB, de longueur constante, dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires Ox et Oy; un point quelconque M de la droite décrit une ellipse. Le centre instantané de rotation est en I, point de rencontre des perpendiculaires élevées en A et B à Ox et Oy; le cercle des inflexions est le cercle AIB. On a

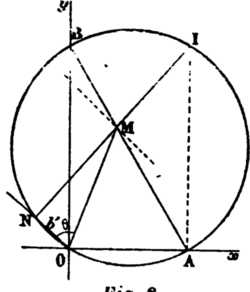


Fig. 2.

$$\rho = \frac{\overline{IM}^2}{MN} = \frac{\overline{IM}^3}{MA.MB} = \frac{\overline{IM}^3}{a.b}.$$

Désignons par a' et b' les longueurs du demi-diamètre OM et de son conjugué; on sait que $IM = b'$ et que

$$a'b' \sin\theta = ab:$$

donc

$$\rho = \frac{b'^4}{a' \sin\theta}.$$

C'est la construction de M. Catalan (G. de Longchamps, *Géométrie analytique*, p. 428).

Note II. — La formule

$$(9) \qquad \frac{1}{IM} - \frac{1}{IM'} = \frac{1}{IN}$$

permet aussi de construire le point M′, connaissant le point M.

En effet, supposons que, sur une droite quelconque AIA′, nous connaissions un couple de points conjugués, A et A′. Les droites AM et A′M′ forment deux faisceaux homographiques quand M et M′ varient, puisque la relation (9) est homographique. Ces deux faisceaux ont un rayon homologue commun AIA′; donc le lieu du point d'intersection des rayons AM, A′M′ est une droite Δ.

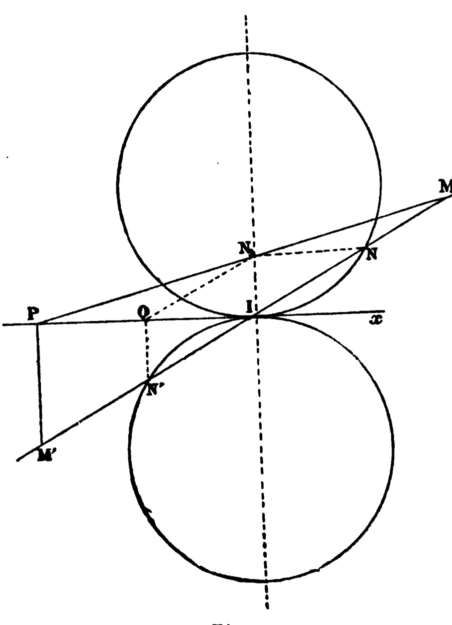


Fig. 3.

On connaît deux couples de points conjugués. Ce sont :

Le point à l'∞ sur IM et le point N′;

Le point N et le point à l'infini, sur IM′;

La droite Δ, est par suite, déterminée; il faut observer qu'elle passe par le point I.

Prenons, pour les points A et A′, la projection de N en N_1 sur Oy et le point à l'infini sur Oy. La droite Δ s'obtient en menant par N_1, une parallèle à IM_1 et par N′ une parallèle à Oy. Ces deux droites se coupent sur Ox, qui est précisément la droite Δ.

La construction pour déterminer N′ est alors la suivante :
Tirer la droite MN_1, *et par le point où elle coupe* Ox, *mener une parallèle à* Oy; *cette parallèle coupe* IM *au point* M′.

Note III. — Les formules

$$(1)\qquad \frac{dx}{d\varphi} = -(y-\beta),\quad \frac{dy}{d\varphi} = x-\alpha,$$

permettent de développer x et y en série. En effet, elles donnent, en prenant φ comme variable indépendante et supposant $\alpha = o$, $\beta = o$:

$$(1')\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx}{d\varphi} = -y, & \dfrac{dy}{d\varphi} = x, \\ \dfrac{d^2x}{d\varphi^2} = -x + \dfrac{d\beta}{d\varphi}, & \dfrac{d^2y}{d\varphi^2} = -y - \dfrac{d\alpha}{d\varphi}, \\ \dfrac{d^3x}{d\varphi^3} = y + \dfrac{d^2\beta}{d\varphi^2}, & \dfrac{d^3y}{d\varphi^3} - x - \dfrac{d^2\alpha}{d\varphi^2}. \end{array}\right.$$

Par la formule de Mac-Laurin, l'on a

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = x_0 - y_0\varphi - \left(x_0 - \dfrac{d\beta}{d\varphi}\right)\dfrac{\varphi^2}{1.2} + \left(y_0 + \dfrac{d^2\beta}{d^2\varphi}\right)\dfrac{\varphi^3}{1.2.3} + \ldots, \\ y = y_0 + x_0\varphi - \left(y_0 + \dfrac{d\alpha}{d\varphi}\right)\dfrac{\varphi^2}{1.2} - \left(x_0 + \dfrac{d^2\alpha}{d\varphi^2}\right)\dfrac{\varphi}{1.2.3} + \ldots, \end{array}\right.$$

x_0, y_0, désignant les valeurs initiales de x et de y.

On sait que la droite qui a pour équations

$$x = x_0 - y_0\varphi,$$
$$y = y_0 + y_0\varphi,$$

est tangente à la trajectoire du point M : que la parabole qui a pour équations :

$$x = x_0 - y_0\varphi - \left(x_0 - \frac{d\beta}{d\varphi}\right)\frac{\varphi}{1.2},$$
$$y = y_0 + x_0\varphi - \left(y_0 + \frac{d\alpha}{d\varphi}\right)\frac{\varphi^2}{1.2},$$

est osculatrice à la trajectoire du point M.

Les formules (α) peuvent servir dans une foule de circonstances. Je vais chercher, par exemple, le lieu des points M qui se trouvent en un sommet de leur trajectoire; c'est-à-dire en un point où l'on peut construire un cercle ayant un contact du troisième ordre avec la trajectoire.

Reprenons le cercle qui a pour équation

$$(X - x')^2 + (Y - y')^2 - R^2 = o.$$

puis, exprimons qu'il a un contact du troisième ordre avec la trajectoire du point M; nous avons

$$(\beta)\left\{\begin{array}{l}(x-x')^2+(y-y')^2-R^2=0,\\(x-x')dx+(y-y')dy=0,\\(x-x')d^2x+(y-y')d^2y+dx^2+dy^2=0,\\(x-x')d^3x+(y-y')d^3y+3(dx\,d^2x+3dy\,d^2y)=0.\end{array}\right.$$

Les trois dernières équations doivent être vérifiées par des valeurs de x' et de y'.

Les deux équations intermédiaires donnent

$$(\gamma)\left\{\begin{array}{l}x-x'=\dfrac{dy(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y-dy\,d^2x},\\[2mm]y-y'=-\dfrac{dx\,(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y-dy\,d^2x},\end{array}\right.$$

En portant ces valeurs dans la dernière on trouve

$$(dx^2+dy^2)(dyd^3x-dxd^3y)+3(dxd^2x+dyd^2y)(dxd^2y-dyd^2x)=0.$$

Il faut maintenant remplacer dx, dy, d^2x, d^2y, d^3x, d^3y par leurs valeurs, ce qui donne:

$$(x^2+y^2)\left[x\left(\frac{d^2\beta}{d\varphi^2}-3\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)-y\left(\frac{d^2\alpha}{d\varphi^2}+3\frac{d\beta}{d\varphi}\right)\right]$$
$$-3\left(y\frac{d\alpha}{d\varphi}-x\frac{d\beta}{d\varphi}\right)\left(y\frac{d\beta}{d\varphi}+\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)=0.$$

Cette équation représente une strophoïde. L'origine est un point double. Les tangentes en ce point sont: la tangente à la courbe, lieu du centre instantané, et la perpendiculaire à cette tangente. Ainsi:

Le lieu des points qui se trouvent en un sommet de leur trajectoire est une strophoïde ayant pour point double le centre instantané de rotation; pour tangentes en ce point, la tangente à la courbe, lieu du centre instantané, et sa perpendiculaire.

Si l'on veut trouver les points dont les trajectoires présentent un contact du quatrième ordre avec un cercle, il faut, aux équations (β), adjoindre l'équation

$$(x-x')dx^4+(y-y')dy^4+4dxd^3x+4dyd^3y+3(d^2x)^2+3(d^2y)^2=0,$$

laquelle, au moyen des formules (γ) devient

$$(dx^2+dy^2)(dydx^4-dxdy^4)+(dxd^2y-dyd^2x)$$
$$[4dxd^3x+4dy\,d^3y+3(d^2x)^2+3(d^2y)^2]=0.$$

En remplaçant dx, dy, etc. par leurs valeurs, on obtient

l'équation fort compliquée

$$(x^2+y^2)\left[x\left(x+\frac{d^3\beta}{d\varphi^3}\right)+y\left(y-\frac{d^3\alpha}{d\varphi^3}\right)\right]+\left[y\left(y+\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)+x\left(x-\frac{d\beta}{d\varphi}\right)\right]$$
$$\left[-4y\left(y+\frac{d^2\beta}{d\varphi^2}\right)-4x\left(x+\frac{d^2\alpha}{d\varphi^2}\right)+3\left(x-\frac{d\beta}{d\varphi}\right)^2+3\left(y+\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)^2\right]=0.$$

qui se réduit à

$$(x^2+y^2)\left[x\left(\frac{d^3\beta}{d\varphi^3}-4\frac{d^2\alpha}{d\varphi^2}-5\frac{d\beta}{d\varphi}\right)-y\left(\frac{d^3\alpha}{d\varphi^2}+4\frac{d^2\beta}{d\varphi^2}-5\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)\right]$$
$$+\left[x\frac{d\beta}{d\varphi}-y\frac{d\alpha}{d\varphi}\right]\left[2y\left(\frac{d^2\beta}{d\varphi^2}-3\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)\right.$$
$$\left.+2x\left(2\frac{d^2\alpha}{d\varphi^2}+3\frac{d\beta}{d\varphi}\right)-3\left(\frac{d\beta}{d\varphi}\right)^2-3\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)^2\right]=0.$$

Celle-ci représente une cubique ayant, avec la strophoïde précédemment trouvée, trois points communs confondus au centre instantané de rotation, et les points cycliques. Donc :

Dans le déplacement d'une figure plane, il existe en général quatre points dont les trajectoires ont un contact du quatrième ordre avec un cercle.

Les formules (α) permettent aussi de traiter les questions relatives aux accélérations d'ordre quelconque.

On sait que l'accélération d'ordre n a pour composantes les quantités $\frac{d^nx}{d\varphi^n}$, $\frac{d^ny}{d\varphi^n}$.

On voit immédiatement que le lieu des points qui ont même accélération d'ordre n est un cercle.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

---

231. — *Soient : un triangle* ABC ; *trois droites* AA', BB', CC', *qui se coupent en* M ; α, β, γ, α', β', γ', *les angles* MAC, MBA, MCB, MAB, MBC, MCA. *Le lieu des points* M, *tels que*

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha' + \cot\beta' + \cot\gamma'$$

est la cubique des inverses, relative au centre de gravité.

2° *Le lieu des points* M, *tels que*

$$\cot\alpha \cot\beta \cot\gamma = \cot\alpha' \cot\beta' \cot\gamma'$$

est la cubique des inverses, relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre.

3° *Le lieu des points* M, *tels que*

$$BA' + CB' + AC' = AB' + CA' + BC'$$

est la cubique des réciproques, relative au point de Nagel.

4° *Le lieu des points* M, *tels que*

$$\frac{1}{BA'} + \frac{1}{CB'} + \frac{1}{AC'} = \frac{1}{AB'} + \frac{1}{CA'} + \frac{1}{BC'}$$

est la cubique des réciproques, relative au point I_0, *réciproque du centre du cercle inscrit, ou point de concours des antibissectrices.*

232. — *Lieu géométrique du point harmoniquement associé aux droites de Simson.*

Soit x, y, z, un point du lieu, correspondant au point x_1, y_1, z_1 de la circonférence circonscrite. On trouve aisément, pour équations des droites qui joignent un point du lieu à A, B, C,

$$-\frac{y}{z} = \frac{y_1 + x_1 \cos C}{z_1 + x_1 \cos B},$$

$$-\frac{x}{y} = \frac{x_1 + z_1 \cos B}{y_1 + z_1 \cos A},$$

$$-\frac{z}{x} = \frac{z_1 + y_1 \cos A}{x_1 + y_1 \cos C},$$

L'élimination de x_1, y_1, z_1, entre ces trois équations, donne l'équation du lieu :

$$\begin{vmatrix} z\cos C + y\cos B & z & y \\ z & x\cos A + z\cos C & x \\ y & x & x\cos A + y\cos B \end{vmatrix} = 0$$

ou en coordonnées barycentriques :

$$\sum \alpha \cot A\,(\gamma - \beta)^2 = 0.$$

Autrement :

Deux droites de Simson, rectangulaires, sont les asymptotes d'une hyperbole équilatère circonscrite au triangle. Soit :

$$(1) \qquad \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_2} + \frac{z}{z_2} = 0 \qquad \frac{x}{x_3} + \frac{y}{y_3} + \frac{z}{z_3} = 0$$

les deux droites de Simson considérées ; l'hyperbole qui les admet pour asymptotes, a pour équation

$$\left(\frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_2} + \frac{z}{z_2}\right)\left(\frac{x}{x_3} + \frac{y}{y_3} + \frac{z}{z_3}\right) = (ax + by + cz)^2.$$

Elle est circonscrite au triangle, donc les carrés des variables doivent disparaître, ce qui donne

$$\frac{1}{x_2x_3} = a^2, \quad \frac{1}{y_2y_3} = b^2, \quad \frac{1}{z_2z_3} = c^2,$$

et l'équation de la courbe devient

$$\sum \frac{x_2(c^2z_2^2 + b^2y_2^2 - 2bcy_2z_2)}{x} = 0.$$

Pour exprimer que cette hyperbole est équilatère, il suffit d'écrire qu'elle passe par le point de concours des hauteurs, ce qui donne :

$$\Sigma x_2 \cos A(cz_2 - by_2)^2 = 0;$$

ou, en coordonnées barycentriques :

$$\Sigma \alpha_2 \operatorname{cotg} A(\gamma_2 - \beta_2)^2 = 0.$$

Cette relation exprime la condition pour que (1) représente une droite de Simson, c'est le lieu décrit par le point harmoniquement associé à cette droite.

Cette cubique est sa propre transformée par points réciproques, et deux points réciproques de la courbe correspondent à deux droites de Simson rectangulaires.

233. — *On considère un point* M; *les perpendiculaires menées par* A, B, C, *respectivement à* MA, MB, MC, *forment un triangle* A′B′C′. *Le lieu géométrique de* M, *tel que* ABC *et* A′B′C′ *soient homologiques, est la cubique des inverses, relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre.*

Les équations des perpendiculaires menées en A et B à MA et MB, sont (x', y', z', coordonnées normales de M).

$$y(y' + z' \cos A) + z(z' + y' \cos A) = 0,$$
$$x(x' + z' \cos B) + z(z' + x' \cos B) = 0;$$

d'où, pour les coordonnées de C′ :

$$z = \frac{y(y' + z' \cos A)}{z' + y' \cos A} = \frac{x(x' + z' \cos B)}{z' + x' \cos B};$$

et, pour les équations de CC′, BB′, AA′ :

$$\frac{y}{x} = \frac{(x' + z' \cos B)(z' + y' \cos A)}{(z' + x' \cos B)(y' + z' \cos A)},$$
$$\frac{x}{z} = \frac{(y' + x' \cos C)(z' + y' \cos A)}{(x' + y' \cos C)(y' + z' \cos A)},$$
$$\frac{z}{y} = \frac{(x' + z' \cos B)(y' + x' \cos C)}{(z' + x' \cos B)(x' + y' \cos C)}.$$

Par multiplication,

$$(z' + y' \cos A)(x' + z' \cos B)(y' + x' \cos C)$$
$$= (y' + z' \cos A)(z' + x' \cos B)(x' + z' \cos C)$$

équation de la cubique des inverses, relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre.

234. — *Soient* M(x, y, z) *un point,* OM *la droite qui le joint au centre du cercle circonscrit : la transformée, par points inverses de* OM, *est une hyperbole équilatère circonscrite au triangle de référence. Un point quelconque de* OM *a ses coordonnées normales proportionnelles à* yz + K *cos* A, xz + K *cos* B, xy + K *cos* C.

Une droite quelconque coupe OM *et l'hyperbole équilatère en trois points correspondant aux valeurs* K_1, K_2, K_3 *du paramètre* K. *Trouver la relation entre* K_1, K_2, K_3.

Cette relation est évidemment

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{yz + K_1 \cos A} & \dfrac{1}{xz + K_1 \cos B} & \dfrac{1}{xy + K_1 \cos C} \\ \dfrac{1}{yz + K_2 \cos A} & \dfrac{1}{xz + K_2 \cos B} & \dfrac{1}{xy + K_2 \cos C} \\ \dfrac{1}{yz + K_3 \cos A} & \dfrac{1}{xz + K_3 \cos B} & \dfrac{1}{xy + K_3 \cos C} \end{vmatrix} = 0;$$

ou, après développement,

$$\begin{aligned} & xyz\Sigma y^2z^2(y \cos B - z \cos C) \\ & + xyz(K_1 + K_2 + K_3)\Sigma yz \cos A(y \cos B - z \cos C) \\ & + xyz(K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3)\Sigma \cos^2 A(y \cos B - z \cos C) \\ & + K_1K_2K_3\Sigma x \cos^3 A(y \cos B - z \cos C) = 0. \end{aligned}$$

On peut appliquer cette formule à l'hyperbole de Kiepert, et aux hyperboles équilatères circonscrites, passant par I, I', I'', I'''. On trouve les résultats déjà connus.

EXERCICE ÉCRIT

57. — On donne un cercle Γ et un diamètre AB. Par A, on fait passer des coniques Ω osculatrices à Γ et touchant en M la droite Δ, menée, par B, tangentiellement à Γ.

1° La normale en M, à Ω, rencontre cette conique en un point I dont on demande le lieu géométrique;

2° Démontrer que l'aire de Ω est constante;

3° Démontrer que les coniques Ω interceptent, sur la droite parallèle à Δ, menée par le centre de Γ, une longueur constante;

4° Trouver l'enveloppe des axes des coniques ΓΩ. Cette enveloppe est une parabole ayant pour directrice la droite δ.

Note sur l'exercice 56 (*).

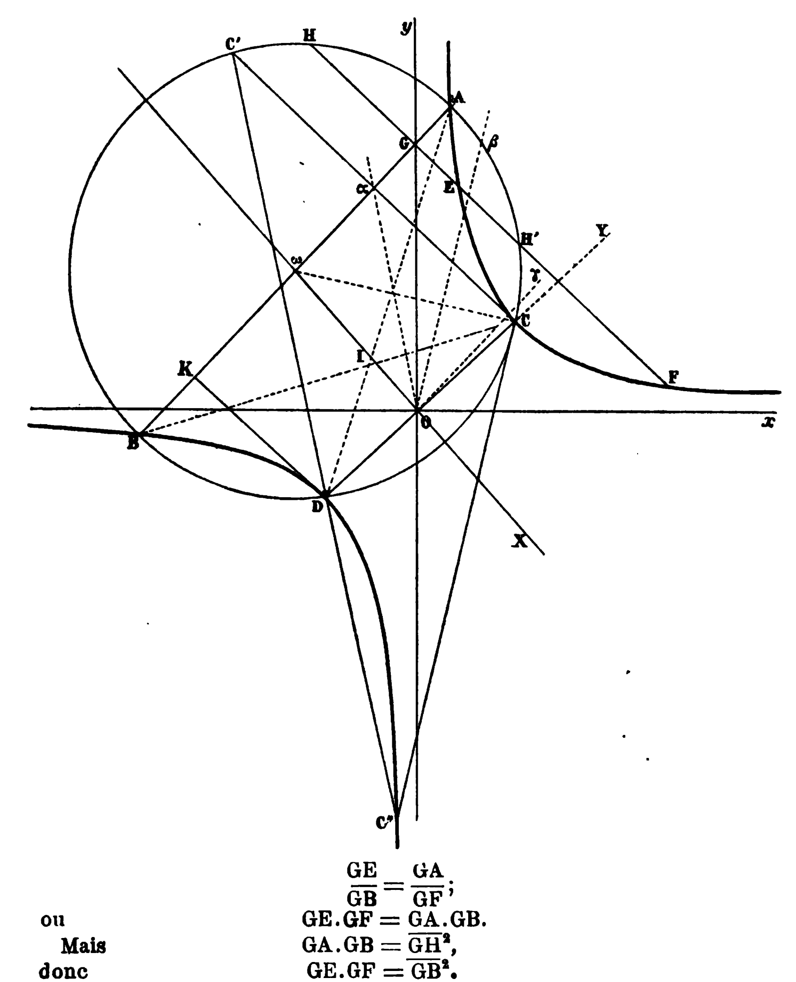
Toutes les propriétés énoncées peuvent aisément s'établir en utilisant celles-ci :

I. *Les quatre points d'intersection de deux hyperboles équilatères, forment un groupe orthocentique.*

(*) Dans le numéro prochain, nous donnerons une solution analytique et, en même temps, nous indiquerons une généralisation qui nous a été signalée par M. Leinekugel. La solution présente est de M. Leinekugel.

II. *Lorsqu'un triangle rectangle est inscrit à une hyperbole équilatère, la tangente au sommet de l'angle droit est perpendiculaire à l'hypoténuse.*

Cela posé, 1° la corde HH' rencontre AB au point G et l'hyperbole aux points E, F. E étant l'orthocentre de ABF, on a dans les triangles semblables BGE, AGF la proportion



$$\frac{GE}{GB} = \frac{GA}{GF};$$

ou $$GE.GF = GA.GB.$$

Mais $$GA.GB = \overline{GH}^2,$$

donc $$GE.GF = \overline{GB}^2.$$

2° Du théorème II, on conclut que les tangentes en C et D sont parallèles, et que CD est un diamètre de l'hyperbole.

Ensuite, du théorème de Joachimsthal, on déduit la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points soient réels la parallèle

au diamètre du cercle, menée par le centre de l'hyperbole doit être située dans l'angle des asymptotes qui renferment la courbe.

3° Le lieu demandé se décompose. Il comprend d'abord, évidemment, le diamètre de l'hyperbole, symétrique de la direction donnée par rapport à un des axes de la courbe.

Puis, les droites DA, CB, par exemple, peuvent être considérées comme les branches correspondantes de deux faisceaux homographiques. Alors le lieu du point de rencontre I est une conique (*théorème de Chasles*), passant par les points fixes CD. Lorsque la droite mobile AB passe par le point O, on a deux points à l'infini, dans deux directions rectangulaires Le lieu est formé de la droite déjà signalée, et d'une hyperbole équilatère passant par les points C D.

4° La tangente à (H), en C, est perpendiculaire à l'hypoténuse AB du triangle ABC, rectangle en C. Elle rencontre donc le cercle (AB) en un point C′, symétrique de C par rapport à $B\omega\alpha A$.

La tangente au cercle, en C, rencontre (H) au point C″.

Je dis que la droite C′C″ passe par l'extrémité D du diamètre COD.

Il suffit évidemment de montrer pour cela que αO est le diamètre conjugué de CC″, ou, ce qui revient au même, que la parallèle à CC″ menée par O, c'est-à-dire la perpendiculaire $O\beta$ au rayon $C\omega$ du cercle est également inclinée que $O\omega$ sur Oy.

En effet, $O\omega$ et $O\gamma$ (parallèle à AB et perpendiculaire à CC′) sont deux diamètres conjugués, par suite $\widehat{\omega Oy} = \widehat{\gamma Oy}$. Or, les angles $\widehat{\beta O\gamma}$, $\widehat{\alpha C\omega}$ sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires, et les angles $\widehat{\omega\alpha C}$ $\widehat{\omega OC}$ sont droits. Le quadrilatère $\omega\alpha CO$ est donc inscriptible. Ains $\widehat{\omega O\alpha} = \widehat{\omega C\alpha} = \widehat{BO\gamma}$; et, par suite, $O\alpha$, $O\beta$ sont deux diamètrse conjugués de l'hyperbote (H).

La parallèle menée de C′ à $O\alpha$ passe évidemment par le point D tel que OD = OC.

Les points C et D étant fixes quand AB reste parallèle à une direction fixe, la propriété se trouve établie.

Remarque. — *A priori*, on voit, tout de suite, que le point D est sur la droite C′C″. Il suffit de supposer que le centre du cercle vient à coïncider avec le centre de l'hyperbole.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 14286-6-92.

SUR UNE CORRESPONDANCE

ENTRE LES FORMES CUBIQUES BINAIRES ET LES POINTS DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

Par M. R. Le Vavasseur, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Moulins.

(*Suite* et *fin*, voir page 145.)

5. — Proposons-nous d'interpréter géométriquement la correspondance

(2) $$(\lambda^2 - 2\lambda\gamma + \beta)\mu = \lambda^2\gamma - 2\lambda\beta + \alpha,$$

qui se rapporte à la forme cubique $\lambda^3 - 3\gamma\lambda^2 + 3\beta\lambda - \alpha = 0$, représentée par le point a, (α, β, γ).

Les plans passant par a déterminent, sur la cubique ($\mathcal{C}$), une involution du troisième ordre, telle que l'a définie M. Appell dans sa thèse.

Donnons-nous le point λ, puis la tangente, au point λ, à la cubique ($\mathcal{C}$). Cette tangente et le point a déterminent un plan lequel rencontre la cubique $\mathcal{C}$: 1° en deux points confondus avec le point λ; 2° en un troisième point μ : *les paramètres λ et μ sont liés par la condition* (2).

Inversement, donnons-nous le point μ; il y correspond deux points λ, d'après (2). Pour les trouver, considérons le cône qui a pour sommet le point μ, et pour directrice la cubique ($\mathcal{C}$). Son équation est

$$\mu^2(y - z^2) + \mu(yz - x) + zx - y^2 = 0,$$

ou $$\mu^2 q + \mu x + p = 0.$$

L'enveloppe de ces cônes, quand μ parcourt la cubique, est la surface ($\mathcal{R}$).

Par la droite $a\mu$, on peut mener deux plans tangents au cône de sommet μ et de directrice ($\mathcal{C}$). Chacun d'eux passe par une tangente à la cubique $\mathcal{C}$ en un point λ, autre que le point μ, et *les deux points λ ainsi obtenus sont ceux qui correspondent au point μ, d'après la relation* (2).

La relation (2) peut s'écrire

$$\lambda^2(\mu - \gamma) - 2\lambda(\gamma\mu - \beta) + \beta\mu - \alpha = 0.$$

Il y a deux points μ', μ'' tels que les deux points λ qui correspondent à chacun d'eux soient confondus. Ils sont donnés par l'équation

$$P = \mu^2(\beta - \gamma^2) + \mu(\beta\gamma - \alpha) + \alpha\gamma - \beta^2 = 0,$$

laquelle exprime que le cône de sommet μ et de directrice ($\mathcal{C}$) passe par le point a. *Ces deux points μ', μ'' sont en ligne droite avec le point* a. Par le point a, on ne peut en général mener qu'une telle droite, qui rencontre la cubique ($\mathcal{C}$) en deux points μ', μ''.

Les équations sont

$$\left\{\begin{aligned} &(\beta - \gamma^2)y + (\beta\gamma - \alpha)z + \gamma\alpha - \beta^2 = 0,\\ &(\beta - \gamma^2)x + (\beta\gamma - \alpha)y + (\gamma\alpha - \beta^2)z = 0.\end{aligned}\right.$$

6. — Un point μ, et les deux points λ qui leur correspondent d'après la relation (2), sont les points-racines d'une certaine forme cubique

$$\lambda^3(\mu - \gamma) - \lambda^2(\mu^2 + \gamma\mu - 2\beta) + \lambda(2\gamma\mu^2 - \beta\mu - \alpha) - \mu(\beta\mu - \alpha) = 0.$$

Le point correspondant à cette forme cubique a pour coordonnées

$$x = \frac{\mu(\beta\mu - \alpha)}{\mu - \gamma}, \qquad y = \frac{2\gamma\mu^2 - \beta\mu - \alpha}{3(\mu - \gamma)}, \qquad z = \frac{\mu^2 + \gamma\mu - 2\beta}{3(\mu - \gamma)}.$$

Le lieu de ce point, quand μ parcourt la cubique ($\mathcal{C}$) est une conique (Γ).

Cette conique (Γ) coupe le plan A, ayant pour foyer a, en deux points. L'équation qui donne les valeurs de μ correspondantes est précisément

$$P = \mu^2(\beta - \gamma^2) + \mu(\beta\gamma - \alpha) + \gamma\alpha - \beta^2 = 0.$$

Les deux points de rencontre sont donc sur la surface ($\mathfrak{R}$). La droite qui les joint est bitangente, en ces deux points, à la surface ($\mathfrak{R}$). C'est la conjuguée de la droite ($\mu'\mu''$) par rapport au complexe ($\mathfrak{L}$).

Le plan A' de la conique (Γ) a pour équation

$$(2\gamma^3 - 3\beta\gamma^2 + \alpha)x - 3(\beta\gamma^2 + \alpha\gamma - 2\beta^2)y + 3(2\gamma^2\alpha - \beta^2\gamma - \alpha\beta)z - (3\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - 2\beta^3) = 0.$$

Le foyer a' *de ce plan est le point qui correspond à la forme cubique* Q (covariant de la forme cubique donnée).

7. — Considérons la forme binaire (hessien de la forme cubique donnée) :

$$\Delta = (\beta - \gamma^2)\mu^2 + (\beta\gamma - \alpha)\mu + \gamma\alpha - \beta^2 = 0.$$

Le premier système polaire du point μ, pour la forme cubique donnée, est déterminé par l'équation

$$(2) \qquad \lambda^2(\mu - \gamma) - 2(\gamma\mu - \beta)\lambda + \beta\mu - \alpha = 0.$$

Le premier système polaire du point μ, pour la forme binaire $\Delta = 0$, est donné par l'équation

$$(3)\ \lambda(2(\beta - \gamma^2)\mu + \beta\gamma - \alpha) + (\beta\gamma - \alpha)\mu + 2(\gamma\alpha - \beta^2) = 0.$$

On sait qu'en éliminant λ, entre ces deux équations (2) et (3), on trouve

$$\Theta = \mathfrak{R}(\mu^3 - 3\gamma\mu^2 + 3\beta\mu - \alpha) = 0,$$

ou $$\mathfrak{R} = (\alpha - \beta\gamma)^2 - 4(\gamma\alpha - \beta^2)(\beta - \gamma^2).$$

Il existe donc trois points μ tels que les premiers groupes polaires, soit par rapport à la forme cubique donnée, soit par rapport à la forme binaire quadratique $\Delta = 0$, aient un point commun : *ce sont les trois points-racines de la forme cubique donnée.* Ils sont dans le plan A ayant a pour foyer.

L'équation qui donne les points communs est

$$T = (2\gamma^3 - 3\beta\gamma + \alpha)\lambda^3 - 3(\gamma\alpha + \beta\gamma^2 - 2\beta^2)\lambda^2 + 3(2\alpha\gamma^2 - \beta^2\gamma - \alpha\beta)\lambda - (3\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - 2\beta^3) = 0.$$

Les trois points correspondants sont dans le plan de la conique (Γ). *Ce sont les trois points-racines de la forme cubique* Q.

8. — Soit a' le foyer du plan de la conique Γ.

Les points μ', μ'', a *et* a' *sont en ligne droite.*

Les coordonnées $(\alpha', \beta', \gamma')$ du point a' sont liées aux coordonnées (α, β, γ) du point a par les formules

$$\alpha' = \frac{3\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - 2\beta^3}{2\gamma^3 - 3\beta\gamma + \alpha},$$

$$\beta' = \frac{2\gamma^2\alpha - \beta^2\gamma - \alpha\beta}{2\gamma^3 - 3\beta\gamma + \alpha},$$

$$\gamma' = \frac{\beta\gamma^2 + \alpha\gamma - 2\beta^2}{2\gamma^3 - 3\beta\gamma + \alpha}.$$

On a, entre (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, les relations

$$\begin{cases} \beta + \beta' = 2\gamma\gamma', \\ \beta\gamma' + \gamma\beta' = \alpha + \alpha', \\ \gamma\alpha' + \alpha\gamma' = 2\beta\beta'. \end{cases}$$

qui nous donnent le moyen de trouver le point a' connaissant le point a, ou réciproquement.

Si en effet on considère les trois surfaces du second ordre déjà citées,

$$\begin{cases} p = zx - y^2 = 0 \\ q = y - z^2 = 0 \\ r = yz - x = 0 \end{cases}$$

le point a' *est à l'intersection des trois plans polaires du point* a *par rapport à ces trois surfaces; et réciproquement.*

9. — Soient f et φ deux formes cubiques, a et b les deux points qui leurs correspondent: *au faisceau* $f + \rho\varphi = 0$ *correspondent tous les points de la droite* (ab). Cette droite rencontre en général la surface ($\mathfrak{R}$) en quatre points. Il y a donc, ordirement, dans un faisceau, quatre formes cubiques ayant une racine double. Prenons une troisième forme cubique, Ψ. Soit c le point correspondant. *Au réseau* $f + \rho\varphi + \sigma\Psi = 0$ *correspondent tous les points du plan* (abc). Dans un réseau, il y a, en général, trois formes cubiques ayant une racine triple. *Ils correspondent aux points de rencontre du plan* (abc) *et de la cubique* ($\mathfrak{C}$).

Si les deux formes f et φ ont une racine commune, λ, le plan osculateur en λ, à la cubique ($\mathfrak{C}$), passera par les deux points a et b. *Le résultant des deux formes* f *et* φ *s'obtiendra donc en exprimant que la droite* (ab) *est tangente à la surface* ($\mathfrak{B}$). Celle-ci est du degré *quatre*. *Le résultant pourra donc se déduire du discriminant d'une forme binaire biquadratique.*

Plus généralement, soient deux formes binaires d'ordre n. On sait que leur discriminant est d'ordre $2(n - 1)$, par rapport aux coefficients des deux formes. Or, il est facile, en faisant correspondre, à chaque forme binaire d'ordre n, un point de l'espace à n dimensions, de généraliser le résultat précédent; et nous pouvons dire que *le résultant de deux formes binaires d'ordre* n *peut se déduire du discriminant d'une forme binaire d'ordre* $2(n - 1)$.

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UNE FORME QUADRATIQUE
EN UN PRODUIT DE DEUX FACTEURS LINÉAIRES

Par **G. Météníer**, professeur au Collège de Saint-Flour.

(*Suite et fin*, voir p. 147.)

II. — Application a la détermination des foyers d'une section plane d'une quadrique.

9. — D'une manière générale considérons la forme quadratique quaternaire, qu'on suppose décomposable dans le produit de deux facteurs :

$$f(x, y, z, t) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy + 2cxt + 2c'yt + 2c''zt + dt^2,$$

et soit Δ son discriminant. Nous ferons des conventions analogues à celles que nous avons faites précédemment, pour la désignation des mineurs de Δ. Par exemple, nous poserons :

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} = \Delta_d.$$

Un mineur tel que Δ_d a lui-même des mineurs. Nous désignerons par Δ_{da}, $\Delta_{db''}$ .... les mineurs de Δ_d, *coefficients* des éléments a, b'', ... quand on développe Δ_a par rapport aux éléments d'une ligne ou d'une colonne contenant l'élément considéré.

Le déterminant K sera :

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & c & \alpha \\ b'' & a' & b & c' & \beta \\ b' & b & a'' & c'' & \gamma \\ c & c' & c'' & d & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix} = \text{K}.$$

Nous en tirons les équations

$$(17) \quad \begin{cases} d\alpha^2 - 2c\alpha\delta + a\delta^2 = 0, \\ d\beta^2 - 2c'\beta\delta + a'\delta^2 = 0, \\ d\gamma^2 - 2c''\gamma\delta + a''\delta^2 = 0, \end{cases}$$

et, de ces trois équations,

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{c \pm \sqrt{-\Delta_{a'a''}}}{d}, \quad \frac{\beta}{\delta} = \frac{c' \pm \sqrt{-\Delta_{aa''}}}{d}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{c'' \pm \sqrt{-\Delta_{aa'}}}{d}.$$

Pour faire porter, sur une même expression, les radicaux qui entrent dans ces formules, nous observons que la forme étant décomposable dans le produit de deux facteurs linéaires on a $\Delta_a = o$, $\Delta_{a'} = o$, $\Delta_{a''} = o$. Alors, si l'on considère les déterminants Δ_a, $\Delta_{a'}$, $\Delta_{a''}$ et leurs adjoints, on a les trois relations bien connues :

$$\Delta_{aa'}\Delta_{aa''} = \Delta_{ab}^2, \qquad \Delta_{a'a}\Delta_{a'a''} = \Delta_{a'b'}^2, \qquad \Delta_{a''a}\Delta_{a''a'} = \Delta_{a''b''}^2.$$

On peut en tirer, par exemple :

$$\sqrt{-\Delta_{aa''}} = -\frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa'}}\sqrt{-\Delta_{aa'}}, \qquad \sqrt{-\Delta_{a'a''}} = -\frac{\Delta_{a'b'}}{\Delta_{a'a'}}\sqrt{-\Delta_{aa'}}.$$

Alors

$$(18) \quad \frac{\alpha}{\delta} = \frac{c \pm \frac{\Delta_{a'b'}}{\Delta_{aa'}}\sqrt{-\Delta_{aa'}}}{d}, \quad \frac{\beta}{\delta} = \frac{c' \pm \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa'}}\sqrt{-\Delta_{aa'}}}{d},$$

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{c'' \pm \sqrt{-\Delta_{aa'}}}{d}.$$

Pour savoir comment il faut associer les signes dans ces formules, il suffit d'écrire qu'elles satisfont à l'une des équations tirées de K autre que les équations (17). Mais au lieu de considérer une équation contenant les trois inconnues α, β, γ, il sera plus simple d'en considérer deux contenant chacune deux de ces inconnues. Nous désignerons par A, B, C, ... les mineurs de K *coefficients* des éléments $a, b, c, \dots$ quand on développe K par rapport aux éléments d'une ligne ou d'une colonne contenant l'élément considéré. Nous savons que $A = o$, $A' = o \dots$. En outre, chacun des mineurs principaux $A, A', \dots$ a ses mineurs nuls, par exemple on a $A_6 = o$, $A'_\alpha = o$. Ce sont les deux équations que nous allons vérifier au moyen du système (18). Ces équations développées sont :

$$\beta\Delta_{aa'} + \gamma\Delta_{ab} + \delta\Delta_{ac'} = o,$$
$$\alpha\Delta_{aa'} + \gamma\Delta_{a'b'} + \delta\Delta_{a'c} = o.$$

Prenons, devant les radicaux, le même signe dans les valeurs de $\frac{\alpha}{\delta}$ et $\frac{\beta}{\delta}$, et un signe contraire au précédent, dans la valeur

de $\frac{\gamma}{\delta}$; substituons, et nous avons :

$$c'\Delta_{aa'} + c''\Delta_{ab} + d\Delta_{ac'},$$
$$c\,\Delta_{a'a} + c''\Delta_{ab'} + d\Delta_{a'c}.$$

La considération des déterminants Δ_a et $\Delta_{a'}$ montre immédiatement que ces résultats sont identiquement nuls.

On a donc associé convenablement les signes, c'est-à-dire qu'on doit prendre le même signe devant les radicaux dans les valeurs de $\frac{\alpha}{\delta}$ et $\frac{\beta}{\delta}$, et un signe contraire au précédent, dans $\frac{\gamma}{\delta}$.

10°. — Supposons maintenant que $f(x, y, z, t) = 0$ soit l'équation d'une quadrique quelconque, et considérons la section de cette quadrique par le plan dont l'équation est

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0.$$

L'équation tangentielle de cette section sera :

$$\begin{vmatrix} & & & & u \\ & K & & & v \\ & & & & w \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & s \\ u & v & w & s & 0 \end{vmatrix} = \Phi(u, v, w, s) = 0;$$

ou, en développant :

$$Au^2 + A'v^2 + A''w^2 + 2Bvw + 2B'uw + 2B''uv + 2Cus + 2C'vs + 2C''ws + Ds^2 = 0.$$

Nous supposerons, dans ce qui suit, les coordonnées rectilignes et rectangulaires. Alors l'équation tangentielle quadratique des points de rencontre du cercle imaginaire de l'infini et du plan $(\alpha\beta\gamma\delta)$ de la section sera :

(19) $$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (\alpha u + \beta v + \gamma w)^2 = 0.$$

L'équation des quadriques enveloppées par les plans tangents à la section et passant par un des points définis par l'équation (19) sera, en appelant V un paramètre arbitraire :

(20) $$\Phi(u, v, w, s) - V[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(u^2+v^2+w^2) - (\alpha u+\beta v+\gamma w)^2] = 0.$$

En cherchant les valeurs de V pour lesquelles cette équation représente deux points, et en attribuant à V une de ces valeurs dans l'équation (20), on aura l'équation tangentielle quadratique d'un couple de foyers. En écrivant que le discriminant de (20) est nul ainsi que tous ses mineurs, on a pour déterminer V, l'équation :

(21) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)DV^2-[\varphi(\alpha,\beta,\gamma)-(a+a'+a'')(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)]KV-K^2=0,$
dans laquelle $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ désigne, comme à l'ordinaire, l'ensemble des termes de $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ qui sont indépendant de δ. Dans ces conditions, le premier membre de l'équation (20) est une forme quadratique décomposable dans le produit de deux facteurs linéaires. En faisant cette décomposition et en annulant chaque facteur, on aura les équations des foyers, et par conséquent les coordonnées des foyers. Appelons x', y', z' les coordonnées d'un foyer et appliquons les formules (18), nous aurons:

$$\frac{x'-\frac{C}{D}}{CC''-B'D-VD\alpha\beta}=\frac{y'-\frac{C'}{D}}{C'C''-BD-VD\beta\gamma}=\frac{z'-\frac{C''}{D}}{C''^2-A''D+VD(\alpha^2+p^2)}$$
$$=\pm\frac{1}{D\sqrt{C''^2-A''D+VD(\alpha^2+\beta^2)}}.$$

Considérons le système d'équations :

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{x-\frac{C}{D}}{CC''-B'D-VD\alpha\beta}=\frac{y-\frac{C'}{D}}{C'C''-BD-VD\beta\gamma}\\&=\frac{z-\frac{C''}{D}}{C''^2-A''D+VD(\alpha^2+\beta^2)}.\end{aligned}\right.$$

Ces équations représentent une droite qui passe par deux foyers. Elles sont donc les équations d'un axe de la section.

Si la section est une parabole, $D=0$. Les formules (18) ne sont plus applicables, car il faudrait supposer, dans ces formules, $d=0$. Mais en raisonnant comme dans le cas d'une forme quadratique ternaire on verra que l'une des solutions est donnée par $d=0$ et $\frac{\alpha}{c}=\frac{\beta}{c'}=\frac{\gamma}{c''}$. L'autre solution sera donnée par les équations (17), où l'on aura fait $d=0$; et qu'on divisera ensuite par δ. C'est ici la seule solution qui convienne, et qui donne le foyer de la parabole situé à distance finie; l'autre solution convient au foyer situé à l'infini. On trouve ainsi, pour le cas où $D=0$:

$$x'=\frac{A-V(\beta^2+\gamma^2)}{2C},\quad y'=\frac{A'-V(\alpha^2+\gamma^2)}{2C'},\quad z'=\frac{A''-V(\alpha^2+\beta^2)}{2C''}.$$

Les équations de l'axe de la parabole seraient :

$$(23) \qquad \frac{x-x'}{C} = \frac{y-y'}{C'} = \frac{z-z'}{C''}.$$

On peut avoir facilement les coordonnées des sommets de la section. Formons l'équation en S de $\Phi(u, v, w, s) = 0$; nous verrons que cette équation est l'égalité (21) dans laquelle on remplacerait V par $\frac{S}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$. Nommons V′ et V″ les racines de l'équation (21). Désignons par p et q les longueurs des demi-axes de la section, et nous aurons :

$$p^2 = -\frac{V'(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{D}, \qquad q^2 = -\frac{V''(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{D}.$$

Pour avoir les coordonnées d'un sommet, il suffira d'observer que les coordonnées du centre de la section étant $\frac{C}{D}, \frac{C'}{D}, \frac{C''}{D}$; en écrivant que chacun des rapports (22) est égal à p, ou à q, divisé par la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs, on aura les coordonnées x, y, z d'un point situé sur l'axe et distant du centre de p, ou de q. On aura donc les coordonnées d'un sommet. Pour le cas de la parabole, il suffira d'observer que la valeur du paramètre est $\frac{V'\sqrt{V'}}{D}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$, et on raisonnera de même, en appliquant les équations (23).

SUR UN DÉTERMINANT NUL

Par Mme veuve **F. Prime**, à Bruxelles.

1. — Je dis que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1, & \sin(\alpha_1+\alpha_2), & \ldots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1), & \sin 2\alpha_2, & \ldots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1), & \sin(\alpha_n+\alpha_2), & \ldots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix},$$

pour $n > 2$, est nul.

En faisant le produit des deux tableaux

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ . & . \\ a_n & b_n \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \\ . & . \\ b_n & a_n \end{matrix} \right\|,$$

on a

$$\begin{vmatrix} 2a_1b_1 & a_1b_2 + a_2b_1 & \dots & a_1b_n + a_nb_1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & 2a_2b_2 & \dots & a_2b_n + a_nb_2 \\ . & . & . & . \\ a_1b_n + a_nb_1 & a_2b_n + a_nb_2 & \dots & 2a_nb_n \end{vmatrix} = 0.$$

Et en posant $a = \sin \alpha$, $b = \cos \alpha$, on trouve immédiatement le résultat énoncé.

2. — On peut déduire, de ce théorème, certaines relations assez remarquables entre les angles d'un triangle.

1° Faisons

$$\alpha_1 = 45^\circ + \frac{A}{2}, \quad \alpha_2 = 45^\circ + \frac{B}{2}, \quad \alpha_3 = 45^\circ + \frac{C}{2},$$

il vient

$$\begin{vmatrix} \cos A, & \sin \frac{C}{2}, & \sin \frac{B}{2} \\ \sin \frac{C}{2}, & \cos B, & \sin \frac{A}{2} \\ \sin \frac{B}{2}, & \sin \frac{A}{2}, & \cos C \end{vmatrix} = 0.$$

2° Pour $\alpha_1 = 45^\circ + A$, $\alpha_2 = 45^\circ + B$, $\alpha_3 = 45^\circ + C$, on a

$$\begin{vmatrix} \cos 2A, & -\cos C, & -\cos B \\ -\cos C, & \cos 2B, & -\cos A \\ -\cos B, & -\cos A, & \cos 2C \end{vmatrix} = 0.$$

3° Pour $\alpha_1 = 90^\circ - A$, $\alpha_2 = 90^\circ - B$, $\alpha_3 = 90^\circ - C$, il vient

$$\begin{vmatrix} \sin 2A, & \sin C, & \sin B \\ \sin C, & \sin 2B, & \sin A \\ \sin B, & \sin A, & \sin 2C \end{vmatrix} = 0.$$

4° Enfin si

$$\alpha_1 = 90^\circ - \frac{A}{2}, \quad \alpha_2 = 90^\circ - \frac{B}{2}, \quad \alpha_3 = 90^\circ - \frac{C}{2},$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} \sin A, & \cos\frac{C}{2}, & \cos\frac{B}{2} \\ \cos\frac{C}{2}. & \sin B, & \cos\frac{A}{2} \\ \cos\frac{B}{2}, & \cos\frac{A}{2}, & \sin C \end{vmatrix} = 0.$$

NOTE SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ
DES SOLIDES A LA MESURE DESQUELS EST APPLICABLE LA *RÈGLE DES TROIS NIVEAUX*

Par M. **Frétille,** ancien élève de l'École Polytechnique, principal du Collège de Bône.

(*Suite et fin*, voir page 153.)

EXTENSION DES PRÉCÉDENTS THÉORÈMES AUX SEGMENTS DE SURFACES DU SECOND ORDRE

1° *Cas du segment sphérique.* — **Lemme I.** — Soient *(fig. 4)* APD un demi-cercle; ACBD le rectangle circonscrit, FG, KM deux demi-cordes parallèles à AC, rencontrant CD en L et N, et coupées en G et L par la droite OC. Cette figure tournant autour de AB, le demi-cercle engendre une sphère, etc. Et l'on a:

cercle FH = cercle FL — cercle FG.

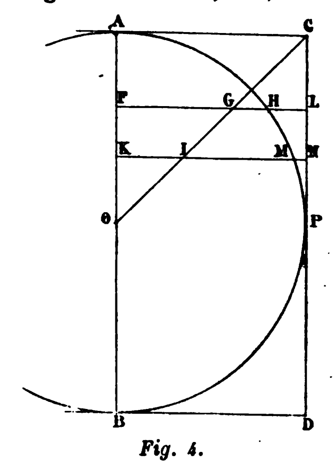


Fig. 4.

Car l'égalité

$$\overline{FH}^2 = R^2 - \overline{OF}^2,$$

peut s'écrire

$$\pi\overline{FH}^2 = \pi\overline{FL} - \pi\overline{FG}^2.$$

On peut dire encore :

couronne HL = cercle FG.

Lemme II (qui se déduit du précédent) :

segm. sph. FKMH = cyl. FKLN — tr. cône FKGI;

car la même relation existe entre les cylindres élémentaires dont les sommes ont pour limites les trois volumes considérés.

Et encore : L'anneau HLMN, différence du cylindre et du segment sphérique, et le tronc de cône FGIK, ayant toutes leurs sections parallèles aux bases, équivalentes et concentriques, ils ont même volume et, de plus, leurs poids peuvent être remplacés par les trois mêmes forces.

Théorème. — *Le segment sphérique est mesurable par la règle des trois niveaux.*

Il suffit, pour le démontrer, d'appliquer cette règle au cylindre FKLN et au tronc de cône FKGI, dont le segment sphérique est la différence, de soustraire les expressions trouvées, et de simplifier.

Théorème. — *Le centre de gravité du segment sphérique est déterminé par la même règle que celui du tronc polyédrique.*

Car, le cylindre et le tronc de cône étant remplacés chacun par les trois forces que l'on sait, ces forces seront appliquées deux à deux aux mêmes points. On les retranchera deux à deux, etc.

2° *Cas du segment d'ellipsoïde, du segment de paraboloïde elliptique.* — On passe par déformation, et sans qu'il soit utile d'insister, du segment sphérique au segment d'ellipsoïde, puis au segment de paraboloïde elliptique. Dans ce dernier cas, les formules se simplifient.

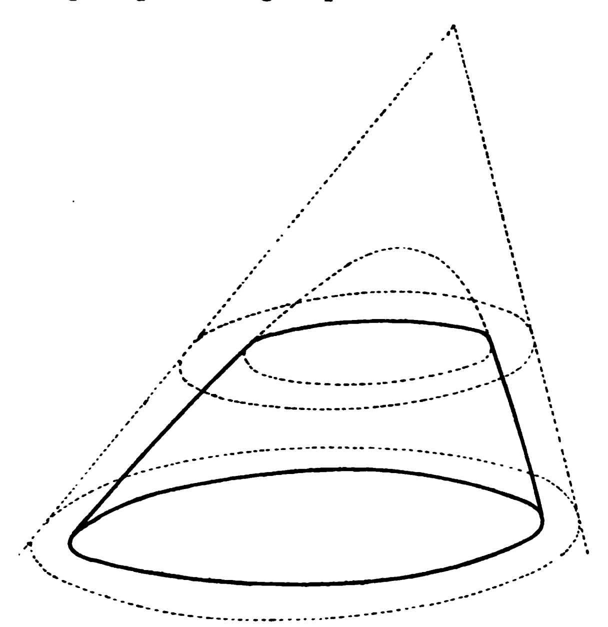
On démontre aisément, en effet, que, si plusieurs plans parallèles coupent un paraboloïde, les aires des sections qu'ils déterminent sont proportionnelles à leurs abscisses, ces abscisses étant comptées sur le diamètre conjugué. On en conclut $2b' = B + b$; d'où

$$V = H + b'.$$

Donc *le segment de paraboloïde elliptique équivaut à un cylindre de même hauteur et ayant pour base sa section médiane*, etc.

3° *Cas du segment d'hyperboloïde à deux nappes.* — On sait que les couronnes interceptées, sur des plans parallèles, par l'hyperboloïde, et son cône asymptote ont une aire constante. Donc le volume compris entre l'hyperboloïde et le cône *(fig. 5)* peut être remplacé par un cylindre de même diamètre ; et, le

segment considéré étant la différence du tronc de cône et du cylindre, on achèverait la démonstration comme pour le segment sphérique, aux signes près.



4° *Cas de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.* — Ces cas se ramènent à celui des surfaces réglées. On pourrait encore considérer le segment d'hyperboloïde comme somme d'un tronc de cône et d'un cylindre.

NOTE SUR LES SURFACES AUXQUELLES S'APPLIQUE LA RÈGLE DES TROIS NIVEAUX

Nous avons montré, jusqu'ici, comment on peut trouver le volume et le centre de gravité d'un tronc de surface réglée, étant connus l'aire et le centre de gravité des bases et de la section médiane. Nous allons chercher maintenant si l'on peut arriver au même résultat, étant connus les aires et les centres de gravité d'autres sections horizontales en nombre suffisant et faites à des hauteurs quelconques.

§ 1er. — AIRE DES SECTIONS. VOLUME DU TRONC.

Rapportons la surface à trois axes rectangulaires OZ, OX, OY, ces deux derniers horizontaux. Soient (*fig. 1*) AB et CD deux génératrices voisines ayant pour équations :

$$\begin{cases} x = az + b, \\ y = cz + d, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a'z + b', \\ y = c'z + d'. \end{cases}$$

Soient enfin, E, B, D les points où le plan horizontal, mené à la hauteur z, coupe OZ, AB, CD. L'aire du triangle EBD est :

$$\frac{1}{2}\left\{(az + b)(c'z + d') - (a'z + b')(cz + d)\right\},$$

Les aires des triangles analogues à EBD ayant des expressions analogues, le polygone qui est leur somme aura pour mesure :

$$\frac{1}{2}\sum\left\{(az + b)(c'z + d') - (a'z + b')(cz + d)\right\};$$

expression du second degré en z. Si nous multiplions les génératrices, le polygone a pour limite la section de la surface réglée; l'aire de cette section varie donc suivant un polynôme du second degré; et l'on peut écrire :

(1) $$S = fz^2 + gz + h.$$

Cette expression, due à Mac-Laurin, devient, par un changement du plan des xy :

(2) $$S = fz^2 + K.$$

Pour $z = 0$, on a $S = K$; nous pouvons donc supposer K positif et nous le remplacerons par Q^2. Alors f pourra être positif ou négatif; si nous le supposons positif, et égal à P^2, la formule devient :

$$S = P^2z^2 + Q^2.$$

La surface a une gorge, répondant à $z = 0$; au-dessus et au-dessous elle s'élargit symétriquement; l'hyperboloïde à une nappe est dans ce cas.

Si, par l'origine, nous menons des parallèles aux génératrices elles auront pour équations :

$$\begin{cases} x = az, \\ y = cz, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a'z, \\ y = c'z; \end{cases}$$

et la section du cône directeur formé aura pour aire :

$$\frac{1}{2}\sum\left\{az.c'z - a'z.cz\right\} = P^2z^2.$$

Donc la section de la surface est la somme de la section du cône directeur et d'une *couronne* constante et équivalente à la section de gorge. Si le cône et la surface réglée se rencontrent, la couronne sera (comme on sait) remplacée par la différence de deux lunules.

La formule (1) renfermant trois coefficients, ils peuvent être déterminés par trois équations, et il suffit de connaître les aires de trois sections pour connaître celles de toutes les autres sections. Voici une solution analytique et une solution géométrique du problème.

Solution analytique. — Le problème étant du premier degré, à trois inconnues, ne peut présenter que des longueurs. Mais il est intéressant de trouver une relation simple entre les aires et les distances respectives de quatre sections.

Soient A, B, C, D, quatre plans sécants parallèles placés dans l'ordre des lettres; S_a, S_b, S_c, S_d, les aires des sections qu'ils déterminent, et ab, cd, etc., leurs distances respectives affectées d'un signe, de telle sorte que $cd + de = 0$, etc. Si nous prenons pour origine le plan A, nous aurons :

$$S_b = p.\overline{ab}^2 + q.ab + S_a$$
$$S_c = p.\overline{ac}^2 + q.ac + S_a$$
$$S_d = p.\overline{ad}^2 + q.ad + S_a.$$

L'élimination de p et de q est aisée; en dirigeant convenablement les calculs, on trouve promptement une formule simple et symétrique. Divisons en effet les trois équations respectivement par ab, ac, ad; retranchons-les deux à deux et simplifions, nous avons :

$$\frac{S_b}{ab} - \frac{S_c}{ac} = p.cb + \frac{S_a.bc}{ab.ac},$$
$$\frac{S_b}{ab} - \frac{S_d}{ad} = p.db + \frac{S_a.bd}{ab.ad}.$$

Divisons respectivement par cb et par db ces équations, retranchons et simplifions. Nous trouvons enfin :

$$\frac{S_a}{ab.ac.ad} + \frac{S_b}{ba.bc.bd} + \frac{S_c}{ca.cb.cd} + \frac{S_d}{da.db.dc} = 0.$$

Solution géométrique. — Si trois plans parallèles déterminent, dans deux surfaces réglées, des sections équivalentes, il en est de même d'un quatrième. Prenons donc un axe vertical et décrivons trois circonférences horizontales ayant pour rayons $\sqrt{S_a}$, $\sqrt{S_b}$, $\sqrt{S_c}$, et pour centres respectifs les points où l'axe coupe A, B, C. Puis, par les procédés de la Géométrie descriptive, construisons un hyperboloïde de révolution qui passe par ces trois circonférences; le point D le coupera suivant une circonférence dont le rayon sera $\sqrt{S_d}$. — Une génératrice de l'hyperboloïde suffira pour cette construction, qui donnera en même temps la position de la gorge, l'aire Q^2 de la gorge Q, et aussi P^2; car le cône asymptote de l'hyperboloïde a les mêmes sections que le cône directeur de la surface réglée.

Remarque. — Si, dans l'équation (2) on a : $f < o$, $k < o$, elle devient :

$$S = -P^2z^2 + Q^2.$$

La surface, renflée pour $z = o$, se rétrécit symétriquement au-dessus et au-dessous de ce plan ; ses sections deviennent nulles, puis négatives. C'est le cas de la surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur deux autres, de telle sorte que ces directrices interceptent, sur la génératrice, une longueur constante.

Ce que l'analyse nous a appris et nous apprendra des surfaces réglées du premier cas s'appliquera à celles-ci, à l'aide d'un changement de signe, et sans qu'il soit utile d'insister. Et, pour leur appliquer la solution géométrique ci-dessus, il suffira de considérer leurs sections comme différences entre celles d'un cylindre de section K^2 et d'une surface du premier cas : $S = P^2z^2 + K^2 - Q^2$, avec la condition : $K^2 > Q^2$.

Corollaire. — Si l'on connaît les aires des sections d'une surface réglée, par trois plans horizontaux, on pourra mesurer le tronc compris entre deux autres plans horizontaux. Ce tronc sera d'ailleurs équivalent à celui que les mêmes plans déterminent dans l'hyperboloïde ci-dessus.

EXERCICE ÉCRIT

58. — *1° On considère la lemniscate de Bernoulli dont l'équation est*

(L) $$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

ainsi que l'hyperbole d'équation

(H) $$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Montrer que tout cercle ayant son centre sur (H) *et passant par le point double de la lemniscate est en outre tangent à la lemniscate.*

2° Tout cercle passant par le centre O *de la lemniscate* (L) *coupe la lemniscate en deux autres points* A *et* B. *Montrer que le lieu des centres des cercles tels que l'on ait*

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = a^2$$

se compose d'un cercle *et d'une hyperbole.*

(En. Barisien.)

Notes sur l'exercice 57.

Prenons pour origine le point A; pour axe Ox, la tangente à Γ, en ce point A; pour axe Oy, le diamètre de A.

1° Les coniques Ω qui ont, avec Γ, trois points confondus, sont, dans le système choisi, représentées par l'équation générale.

(1) $$x^2 + (1 + \mu^2)y^2 - 2\mu xy - 2Ry = 0;$$

dans laquelle μ représente un paramètre arbitraire. La droite Δ, menée par B, parallèlement à Ox, touche la conique (1) en un point dont l'abscisse est $2R\mu$. D'après cela, le lieu du point I est une cubique correspondant à l'équation

$$x^2 = \frac{4R^2y}{2R - y}.$$

2° Avec les notations habituelles, nous avons

$$A = 1, \quad A' = 1 + \mu^2, \quad A'' = 0, \quad B'' = -\mu, \quad B' = 0, \quad B = R.$$
$$\delta = AA' - B''^2 = 1,$$
$$\Delta = AA'A' + 2BB'B' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 - R^2.$$

L'équation qui donne les carrés des axes de la conique (1) est donc (*G. An.*, p. 290)

$$z^2 - R^2(2 + \mu^2)z + R^4 = 0.$$

On déduit de là que l'aire de Ω est constante et égale à celle de Γ.

3° En cherchant l'intersection de la droite δ, ($y = R$), avec Ω, on voit que la différence des abscisses des points d'intersection est égale à $2R$. Cette propriété résulte encore, bien simplement, de la remarque faite au paragraphe précédent, et du second théorème d'Apollonius.

4° Les directions asymptotiques de Γ sont données par

$$x^2 + (1+\mu^2)y^2 - 2\mu xy = 0.$$

Les parallèles aux axes, menées par l'origine, sont donc représentées par

$$x^2 - y^2 = \frac{-\mu^2}{-\mu} xy = \mu xy.$$

Le faisceau des axes correspond à l'équation

$$(x-\mu R)^2 - (y-R)^2 - \mu(x-\mu R)(y-R) = 0.$$

On déduit, de là, l'équation de l'enveloppe

$$x^2 + 4Ry = 0.$$

C'est une parabole admettant δ pour directrice. Les tangentes issues à cette parabole, d'un point de δ, sont, en effet, rectangulaires.

Nota. — M. Barisien nous a envoyé une très élégante solution de l'exercice 57.

CONCOURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*) (1892)

SOLUTION ANALYTIQUE

1° Prenons, pour axes de coordonnées, la droite AB et la corde perpendiculaire HH′, considérées dans l'énoncé.

L'équation de l'hyperbole est

$$x^2 - y^2 + \ldots + k = 0.$$

On a donc, d'après cela,

$$GA.GB = GE.GF = \overline{GH}^2.$$

2° Prenons Γ rapportée à ses asymptotes; soient $y - \lambda x - \mu = 0$, l'équation de AB; $y - \frac{1}{\lambda} x - \mu' = 0$, celle de la droite CD, seconde corde d'intersection de (H) avec (C).

En écrivant que

$$(y-\lambda x-\mu)\left(y-\frac{1}{\lambda}x-\mu'\right) + \theta(xy - m^2) = 0$$

représente la circonférence (C), on trouve

$$\theta = \lambda + \frac{1}{\lambda}.$$

Finalement, l'équation de (C) est

$$x^2 + y^2 + y(\mu' - \mu) + x\left(\frac{\mu}{\lambda} - \mu'\lambda\right) - m^2\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 0.$$

Le centre a pour coordonnées:

$$\frac{1}{2}\left(\mu'\lambda - \frac{\mu}{\lambda}\right), \qquad \frac{1}{2}(\mu - \mu');$$

comme il appartient à AB, on a

(*) Voyez l'énoncé, p. 139; et une solution géométrique, p. 166.

$$\mu - \mu' - \lambda\left(\mu'\lambda - \frac{\mu}{\lambda}\right) - 2\mu = 0,$$

ou
$$\mu'(1 + \lambda^2) = 0.$$

La droite donnée AB étant réelle, on a

(1)
$$\mu' = 0;$$

ainsi CD passe par le centre de (H). C'est, d'ailleurs, une propriété bien connue.

On voit donc que si A, B appartiennent à deux branches de (H), les quatre points sont réels; dans le cas contraire, il y a deux points imaginaires et deux points réels.

3° Le système des cordes communes à (C) et à Γ est représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 + \frac{\mu}{\lambda}x - \mu y - m^2\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + t(xy - m^2) = 0.$$

Prenons les trois dérivées par rapport à x, y, z; nous avons

$$2x + ty + \frac{\mu}{\lambda} = 0,$$
$$tx + 2y - \mu = 0,$$
$$\frac{\mu}{\lambda}x - \mu y - 2tm^2 - 2m^2\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 0.$$

L'équation du lieu s'obtiendra en éliminant μ et t entre ces égalités (*).

En les multipliant, respectivement, par x, y, -1; puis, en ajoutant les résultats, on a

$$x^2 + y^2 + txy + tm^2 + m^2\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 0.$$

D'autre part, les deux premières égalités donnent

$$2(y + \lambda x) + t(x + \lambda y) = 0.$$

Finalement, l'équation du lieu est

$$\left[x^2 + y^2 + m^2\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\right](x + \lambda y) = 2(y + \lambda x)(m^2 + xy),$$

ou
$$(x^2 - y^2)(x - \lambda y) = m^2\,\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}\,(x - \lambda y) = 0.$$

Cette équation se décompose. Le facteur $x - \lambda y$, égalé à zéro, représente l'isogonale (1). C'est une droite fixe, puisque AB, dans son mouvement, reste parallèle à une direction fixe. Or, en considérant le quadrilatère ABCD, parmi les couples qui correspondent à ces quatre points, se trouve celui qui est formé par les droites AB, CD; le centre de ce couple appartient à la droite fixe RR'. On devait donc trouver le facteur $\lambda y - x$ dans l'équation faisant connaître le lieu des centres des couples considérés.

Quant aux deux droites AD, BC, qui se correspondent homographiquement, le lieu de leur point de concours est une conique passant par les points C, D.

L'équation du lieu étant

(*) On pourrait, bien entendu, écrire le résultat immédiatement sous la forme d'un déterminant. Mais le calcul qu'il faut effectuer pour développer celui-ci ou pour mettre en évidence le facteur singulier signalé plus loin n'est pas plus rapide.

(H′ $$x^2 - y^2 = m^2 \frac{\lambda^2 - \lambda}{1},$$

si l'on cherche à déterminer les droites allant de l'origine aux points communs à (H) et à (H′), on est conduit à l'équation

$$x^2 - y^2 = xy \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda},$$

laquelle peut se mettre sous la forme

$$(y + \lambda x)(x - \lambda y) = 0.$$

On voit par là que (H′) passe par les points C, D, et qu'elle coupe (H) en deux autres points imaginaires situés sur le diamètre Oω perpendiculaire à CD.

4° Prenons pour axe des Y la droite fixe CD, pour origine le point O, milieu de CD et pour axe OX, une perpendiculaire à OY ; c'est la droite Oω qui joint les milieux des cordes AB, CD.

Les équations de (C) et de (H) sont

$$X^2 + Y^2 - 2\theta h X - h^2 = 0, \qquad (C)$$
$$X^2 - Y^2 - 2KXY + h^2 = 0. \qquad (H)$$

La tangente à (C), au point C, a pour équation

$$Y - \theta X - h = 0.$$

En cherchant l'intersection de cette droite avec (H), on trouve que les coordonnées de C″ vérifient les équations suivantes

$$\begin{matrix} C'' \\ (X'', Y'') \end{matrix} \Big\} \quad Y = h + \theta X, \qquad X - 2KY = \theta(Y + h).$$

Un calcul analogue donne, pour déterminer les coordonnées du point C′,

$$\begin{matrix} C' \\ (X', Y') \end{matrix} \Big\} \quad Y + KY = h, \qquad X = K(Y + h) + 2\theta h.$$

L'équation de C′C″ étant

$$Y - Y' = \frac{Y' - Y''}{X' - X''}(X - X'),$$

le point où elle coupe OY a pour ordonnée

$$Y = \frac{X'Y'' - Y'X''}{X' - X''}.$$

Or, on a, par les formules C′, C″

$$Y' = h - KX', \qquad Y'' = h + \theta X''$$

et, par conséquent, $$Y = h + (\theta + K)\frac{1}{\frac{1}{X''} - \frac{1}{X'}}.$$

Il reste à calculer la quantité $\frac{1}{X''} - \frac{1}{X'}$.

Les formules C′, C″ donnent par élimination successive de Y

$$\frac{2h(\theta + K)}{X''} = 1 - \theta^2 - 2K\theta,$$

$$\frac{2h(\theta + K)}{X'} = 1 + K^2,$$

d'où $$2h\left(\frac{1}{X'} - \frac{1}{X''}\right) = K + \theta.$$

Finalement $$Y = -h.$$

La droite C′C″ passe donc par le point fixe D.

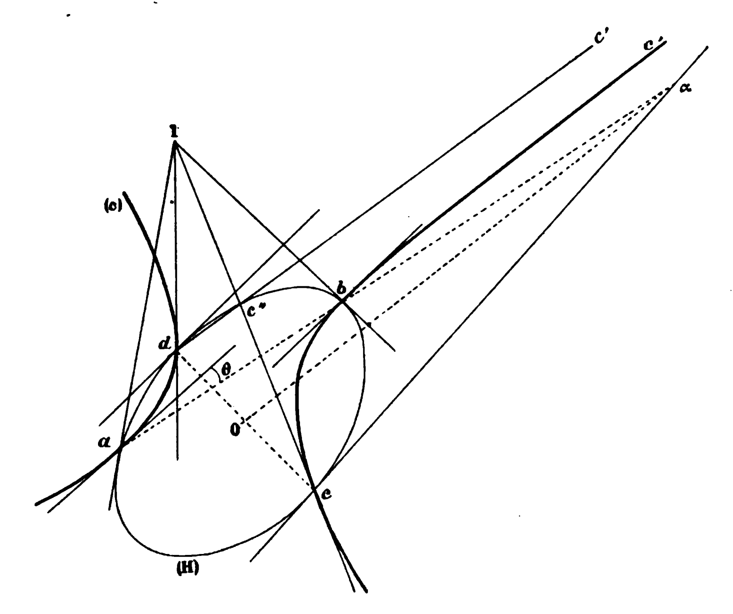
GÉNÉRALISATION, par M. **M. G. Leinekugel.**

Je considère une conique (H) *quelconque, et trois points* a, b, c *de cette conique.*

Soit (C) *une conique passant par* a, b, c *et tangente en* a, b, *à deux droites parallèles à la tangente en* c *à* (H), *qui fait un angle* θ *avec la ligne* ab.

1° Si je fais varier la droite *ab*, l'angle θ est constant, j'aurai, pour chacune des positions de cette droite *ab*, une conique (C). Je vais montrer que toute droite parallèle à la tangente en *c* à (H), c'est-à-dire faisant un angle θ avec *ab*, coupe les deux coniques suivant quatre points formant une division harmonique.

Cette conique (C) rencontre (H) en un quatrième point *d*. Je dis que



***cd* est un diamètre de (H). On sait en effet que l'enveloppe des droites qui rencontrent deux coniques données suivant quatre points formant une division harmonique est une conique tangente aux huit droites tangentes aux deux coniques, en leurs points communs. Or ici cette conique se réduit à deux points dont l'un est rejeté à l'infini, sur la droite faisant un angle θ avec *ab* (puisque cette conique admet trois tangentes parallèles à cette droite) ; par suite en *d* la tangente à (H) est parallèle à la tangente en *c*. Ceci nous montre que le pôle T de *ab* par rapport à (H) coïncide avec le pôle de *cd* par rapport à (C). Il en résulte que toutes les droites rayonnant autour de T où faisant un angle θ avec *ab* rencontrent les coniques (H) (C) en quatre points formant une division harmonique.**

2° On peut se demander à quelle condition la droite ab doit satisfaire pour que les points c, d soient réels. Si la conique (H) est une ellipse les quatre points sont toujours réels. Si ou (H) est une hyperbole nous distinguerons deux cas, celui où la parallèle L menée par O centre de H) à ab est ou n'est pas dans l'angle des asymptotes qui contient la courbe. Dans le premier cas, si l'on mène par D une droite L′ faisant un angle θ avec L, il faut, pour que les points c, d soient réels, que la droite L′ soit dans l'angle des asymptotes qui ne renferme pas la courbe, ou enfin que θ soit supérieur à l'angle des asymptotes. Dans le second cas, la droite L doit faire un angle supérieur à (H) avec l'une des deux asymptotes.

3° L'angle θ étant toujours constant, si ab se déplace en restant parallèle à une direction fixe, la droite cd est fixe puisqu'elle est le diamètre de (H) des droites faisant un angle θ avec la direction donnée.

4° En un des quatre points communs aux deux coniques, soit c, nous menons la tangente à (H) qui rencontre (C) en c' ; ce point est tel que $c\alpha = c'\alpha$ puisque ab est le diamètre de (C) de la direction cc'. La tangente en c à (C) rencontre (H) en c'' : ce point est sur CT le symétrique de c par rapport à la droite Oα qui est le diamètre conjugué de (H) de la droite CT. En effet le pôle de cette droite CT est sur cc' ; et, de plus, sur la polaire de T la droite ab ; c'est donc le point α. La droite $c'c''$ est donc parallèle à Oα et elle rencontre par suite CO au point d. Si donc la droite ab se déplace parallèlement à elle-même les points c, d étant fixes toutes les droites $c'c''$ passeront par le point d.

Il suffit de supposer que $\theta = \frac{\pi}{2}$ et que (H) est une hyperbole équilatère et C un cercle pour avoir, comme cas particulier de ce qui précède la question proposée.

Remarque. — On peut remarquer aussi que ces propriétés étant toutes projectives, on a ces propriétés générales relatives à une série de deux coniques quelconques (H), (C) satisfaisant à cette condition unique que se coupant en quatre points a, b, c, d, les tangentes en a, b à (H) en c, d à (C) concourent en un même point T′.

Les quatre autres tangentes concourent en un même point T, et les droites rayonnant autour des points T, T′ rencontrent les deux coniques suivant quatre points formant des divisions harmoniques.

Les tangentes en l'un quelconque des points communs, aux deux coniques, au point c par exemple, les rencontrant en c', c'' la droite $c'c''$ passera encore par le point d.

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS DE 1892

Calcul trigonométrique.

On donne les trois côtés d'un triangle

$$a = 58124.59, \quad b = 46571.46, \quad c = 37604.18$$

Calculer les trois angles et la surface.

Épure.

Intersection d'une sphère et d'un cylindre.

Le rayon de la sphère est de 80^{mm}. Le centre a sa projection horizontale à 90^{mm} du bord inférieur de la feuille, à 135^{mm} du bord de gauche, et à 220^{mm} de la projection verticale.

La trace horizontale du cylindre est un cercle de 60^{mm} de rayon, et dont le centre est à 140^{mm} du bord inférieur de la feuille et à 120^{mm} du bord de droite. Les génératrices sont de front, inclinées de $60°$ sur le plan horizontal, et s'élèvent de droite à gauche au-dessus de ce plan.

On demande de représenter par ses projections le solide qui reste, après que l'on a enlevé de la sphère la portion qui se trouve à l'intérieur du cylindre; les parties cachées seront tracées en points ronds.

On indiquera en traits rouges la construction d'un point quelconque et des points remarquables de l'intersection, ainsi que celle des tangentes en ces points.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CONCOURS DE 1892.

Étant donnés un ellipsoïde E, de centre O, et un cône du second ordre Q, de sommet S, on considère un trièdre $O\alpha\beta\gamma$, dont les arêtes forment un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde, et on prend le point d'intersection de chaque arête de ce tièdre avec le plan diamétral qui lui est conjugué dans le cône Q. On obtient ainsi trois points A, B, C, qui déterminent un plan P.

1° Démontrer que le plan P passe par un point fixe F, quand le trièdre $O\alpha\beta\gamma$ varie.

2° Les points S et F déterminent une droite D; trouver le lieu des droites D qui passent par un point donné ω, lorsque le cône Q se déplace en restant égal et parallèle à un cône fixe.

3° Trouver, dans la même hypothèse, l'enveloppe G des droites D qui sont situées dans un plan donné H.

4° Trouver le lieu des foyers des courbes G, lorsque le plan H se déplace en restant parallèle à une droite donnée.

Composition sur l'analyse et ses applications géométriques.

On considère la surface S lieu des points M dont les coordonnées rectangulaires X, Y, Z sont définies par les équations

$$X = u \cos v, \qquad Y = u \sin v, \qquad Z = av + \sqrt{b^2 - u^2} - b\,L\frac{b + \sqrt{b^2 - u^2}}{u},$$

dans lesquelles u, v désignent des variables indépendantes et a, b des longueurs données.

1° Étudier brièvement les courbes (V) définies par l'équation $v =$ constante; ces courbes sont planes et leur plan coupe la surface S sous un angle constant.

2° Montrer que la surface S est applicable sur une surface de révolution Σ, et indiquer le mode de correspondance entre les points des deux surfaces.

3° Un trièdre trirectangle $Mxyz$ se meut de manière que, dans chacune de ses positions, l'arête Mz soit normale en M à la surface S et l'arête Mx tangente à la courbe (V) qui passe au sommet M. A un mouvement élémentaire du trièdre correspondent un déplacement du sommet M, dont les projections sur les arêtes Mx, My, Mz sont de la forme

$$\xi du + \xi_1 dv, \qquad \eta du + \eta_1 dv, \qquad 0,$$

et une rotation du trièdre, dont les composantes suivant les mêmes arêtes sont de la forme

$$pdu + p_1 dv, \qquad qdu + q_1 dv, \qquad rdu + r_1 dv;$$

on demande d'exprimer en fonction de u et de v les quantités

$$\xi, \ \eta, \qquad \xi_1, \ \eta_1,$$
$$p, \ q, \ r. \qquad p_1, \ q_1, \ r_1.$$

4° Déterminer les lignes de courbure de la surface S et ses rayons de courbure principaux.

5° Trouver la surface lieu des centres de courbure principaux de S; montrer que les deux nappes de ce lieu sont applicables sur une alysséide.

6° Déterminer les lignes asymptotiques de la surface S, leur courbure et leur torsion.

Composition de mécanique rationnelle.

Un point matériel M est assujetti à se mouvoir sur une surface fixe S sous l'action d'une force P, constamment dirigée dans le plan tangent au point M; cette force dérive d'un potentiel et sa grandeur, en chaque point, ne dépend que de la valeur u du potentiel en ce point. On suppose en outre que le point M peut décrire une infinité de courbes d'égal potentiel, pourvu qu'on lui imprime une vitesse initiale convenable.

1° Démontrer que le carré de l'élément linéaire de S peut être représenté par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2}{F(u)} + \frac{dv^2}{\varphi(u)},$$

les lignes $v =$ constante étant des lignes géodésiques orthogonales aux courbes d'égal potentiel.

2° En supposant que les lignes d'égal potentiel soient des courbes fermées, déterminer la forme des fonctions $F(u)$, $\varphi(u)$, de telle sorte que le point M décrive une trajectoire fermée, quelles que soient les conditions initiales où il est placé, la vitesse initiale pouvant toutefois être soumise à certaines restrictions.

Trouver l'expression de la force P qui doit alors agir sur le mobile.

3° On reconnaîtra que, parmi les surfaces qui satisfont à la question, se trouve la surface de révolution S_1 pour laquelle on a

$$ds^2 = \frac{m^8 du^2}{4u(m^2+u)^4} + \frac{m^4 u dv^2}{(m^2+u)^2},$$

m désignant une longueur donnée et v l'azimut de l'élément ds par rapport à un plan méridien fixe.

Étudier la forme de la surface S_1.

Déterminer le mouvement que prendra le point M sur cette surface sous l'influence de la force P considérée aux paragraphes précédents; on suppose qu'à l'instant initial le mobile est sur le parallèle correspondant à $u = 2m^2$ et que sa vitesse est tangente à ce parallèle.

Calculer la pression que, dans ce mouvement, le point M exercera sur la surface S_1.

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16344-7-92.

NOTE SUR L'HYPOCYCLOIDE

A TROIS REBROUSSEMENTS ET SUR LES QUARTIQUES DE TROISIÈME CLASSE

Par M. **P. Delens**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Rouen.

I. — Je me propose d'indiquer un lieu géométrique qui met en évidence une propriété très simple de l'hypocycloïde à trois rebroussements. Cette propriété est une conséquence immédiate des théorèmes démontrés sur cette courbe par Cremona, Painvin, etc., mais il ne me semble pas qu'elle ait été présentée, encore, sous cette forme.

Voici cette propriété :

1°. *Le lieu des points d'où on peut mener à une hypocycloïde à trois rebroussements des tangentes dont les trois points de contact soient en ligne droite est la circonférence circonscrite à cette courbe.*

2°. *L'enveloppe de la droite qui passe par les trois points de contact est une autre hypocycloïde à trois rebroussements circonscrite au cercle précédent et admettant pour sommets les points de rebroussement de la première hypocycloïde.*

Ces théorèmes se démontrent sans peine en observant que l'hypocycloïde à trois rebroussements est une courbe unicursale, et en utilisant les formules indiquées par M. de Longchamps (*).

Rapportons en effet la courbe à deux axes rectangulaires, l'origine étant en un des points de rebroussement, et l'axe des x étant la tangente en ce point. Les coordonnées de tout point de la courbe pourront être représentées par les formules :

$$(1) \qquad x = \frac{Rt^2(3 + t^2)}{(1 + t^2)^2}, \qquad y = \frac{2Rt^3}{(1 + t^2)^2},$$

dans lesquelles $\frac{R}{4}$ est le rayon du cercle inscrit à la courbe,

---

(*) Voir *J. M. S.* 1884, p. 169.

et t le coefficient angulaire de la tangente au point que l'on considère.

L'équation d'une tangente quelconque à la courbe étant:

$$(y - tx)(1 + t^2) + Rt^3 = 0$$

les points de contact des tangentes issues du point P (α, β) sont déterminés par l'équation du troisième degré:

$$(2) \qquad t^3(\alpha - R) - \beta t^2 + \alpha t - \beta = 0.$$

D'autre part, les points de rencontre d'une droite quelconque Δ:

$$(\Delta) \qquad ux + vy + w = 0$$

avec la courbe étant déterminés par l'équation:

$$(3) \quad (uR + w)t^4 + 2vRt^3 + (3uR + 2w)t^2 + w = 0,$$

nous aurons le lieu du point P, en exprimant que le premier membre de cette équation (3) est divisible par le premier membre de l'équation (2); ce qui donne les conditions:

$$(4) \qquad \begin{cases} \beta^2Ru + 2\beta R(\alpha - R)v + [\beta^2 + (\alpha - R)^2]w = 0. \\ (2\alpha - 3R)u - w = 0, \\ \beta^2Ru + [\beta^2 + \alpha(\alpha - R)]w = 0. \end{cases}$$

L'élimination de u, v, w entre ces trois équations homogènes donne la relation cherchée entre α et β, laquelle se réduit, après suppression du facteur étranger $\alpha - R$, à:

$$(5) \qquad 2(\alpha^2 + \beta^2) - 3R\alpha = 0.$$

Le lieu du point P est donc bien la circonférence circonscrite au triangle des points de rebroussement de l'hypocycloïde.

— Cherchons maintenant l'enveloppe de la droite Δ qui passe par les points de contact lorsque le point P décrit la circonférence précédente.

Si nous tenons compte de la relation (5), les équations (4) se réduisent à:

$$(6) \qquad 2\beta^2u + \alpha w = \qquad \beta u + \alpha v = 0,$$

et l'élimination de α et β nous donne aussitôt l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée:

$$3Ruv^2 + (u^2 + v^2)w = 0.$$

Il serait facile de remonter à l'équation cartésienne de l'enveloppe en observant qu'une tangente quelconque à la courbe cherchée a pour équation, en posant $t = -\frac{u}{v}$:

$$(1 + t^2)(y - tx) + 3Rt = 0;$$

ce qui donne pour les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe :

$$x = \frac{3R(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}, \qquad y = \frac{-6Rt^3}{(1+t^2)^2}.$$

On peut alors discuter la courbe, et l'on voit sans peine qu'elle représente une hypocycloïde à trois rebroussements ayant un sommet à l'origine, un point de rebroussement sur Ox, et circonscrite au cercle de rayon $\frac{3R}{4}$, qui constitue le lieu précédent.

Cette courbe est la *développée* de l'hypocycloïde donnée; on peut donc encore énoncer le théorème suivant, facile à vérifier par un calcul direct :

La normale, en un point quelconque d'une hypocycloïde à trois rebroussements, rencontre cette courbe en trois autres points pour lesquels les tangentes vont concourir sur la circonférence qui lui est circonscrite.

Il est évident qu'un seul de ces trois points de rencontre est réel.

Nous verrons un peu plus loin que cette propriété de la normale est caractéristique pour l'hypocycloïde à trois rebroussements.

II. — Les propriétés de l'hypocycloïde à trois rebroussements que nous venons de démontrer sont un cas particulier de propriétés analogues des quartiques de troisième classe.

Proposons-nous en effet de chercher le lieu du point P et l'enveloppe de la droite Δ pour une quartique quelconque possédant trois points de rebroussement, et pour cela transformons la question par polaires réciproques. On se trouve ramené au problème suivant :

Trouver le lieu d'un point d'où l'on peut mener, à une cubique à point double, des tangentes telles que trois de leurs points de contact soient en ligne droite; et trouver l'enveloppe de cette droite.

La question se traiterait sans peine par le calcul en partant de l'équation de la cubique réduite à la forme simple :

$$(ax^2 + by^2)z = x^3;$$

mais les résultats sont bien connus. On sait en effet que le

lieu du point cherché est la *Hessienne* de la cubique donnée, c'est-à-dire une cubique ayant même point double que la courbe donnée et les mêmes tangentes en ce point double; cette courbe H admet également pour points d'inflexion les points d'inflexion de la cubique et touche ses trois tangentes d'inflexion.

Quant à l'enveloppe de la droite des contacts, c'est la *Cayleyenne* de la cubique, laquelle se décompose alors en son point double (qui ne répond pas à la question) et une conique, constituant le véritable lieu. Cette conique C est tangente à la cubique H aux points où elle touche les tangentes d'inflexion de la cubique donnée; elle touche également les tangentes au point double de cette cubique en leurs points de rencontre avec la droite qui passe par ses points d'inflexion.

Si nous revenons maintenant, par une transformation inverse, au problème primitif, nous obtenons les résultats suivants :

1° Le lieu des points d'où l'on peut mener à une quartique de troisième classe, des tangentes dont les trois points de contact soient en ligne droite est une conique passant par les points de rebroussement de la quartique donnée et par les points de contact de cette courbe avec sa tangente double; les tangentes en ces derniers points passent par le point de concours des tangentes de rebroussement.

2° L'enveloppe de la droite passant par les trois points de contact est une quartique de troisième classe passant par les trois points de rebroussement de la quartique donnée (où elle touche le lieu précédent), tangente à ses trois tangentes de rebroussement, et admettant la même tangente double avec les mêmes points de contact.

Nous retrouvons ainsi tous les résultats précédemment indiqués pour l'hypocycloïde à trois rebroussements.

En outre, si nous cherchons dans quel cas la droite qui passe par les trois points de contact est normale à la quartique donnée, ce qui exige que l'enveloppe de cette droite coïncide avec la développée de cette quartique, nous voyons facilement que l'hypocycloïde à trois rebroussements peut seule satisfaire à cette condition; nous pouvons donc encore énoncer le théorème suivant :

Si chaque normale à une quartique de troisième classe rencontre la courbe en trois points (autres que son pied) pour lesquels les tangentes soient concourantes, cette quartique est une hypocycloïde à trois rebroussements.

—Un autre cas particulier intéressant est celui de la *cardioïde;* le lieu du point P est alors le cercle symétrique du cercle directeur de la cardioïde, par rapport à son point de rebroussement.

On vérifierait sans peine ce résultat, par un calcul analogue à celui que nous avons fait pour l'hypocycloïde à trois rebroussements, en se servant pour représenter la cardioïde des formules simples :

$$x = \frac{4R(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \qquad y = \frac{8Rt}{(1+t^2)^2},$$

qui donnent pour équation de la tangente en un point de cette courbe :

$$x(3t^2 - 1) + ty(t^2 - 3) + 4R = 0.$$

Nous laissons au lecteur le soin de développer ce calcul.

III. — Les propriétés précédentes, transformées par la méthode de transformation réciproque, en prenant pour sommets du triangle fondamental les trois points de rebroussement de la quartique donnée, conduisent à de nouveaux théorèmes que nous nous contenterons d'indiquer pour terminer, et qui peuvent s'énoncer ainsi:

Considérons une conique fixe γ, inscrite à un triangle ABC, et menons par les trois points A, B, C, et par un point P du plan de ce triangle des coniques tangentes à la conique γ; *le lieu du point* P *tel que les points de contact avec* γ *soient situés sur une même conique* γ' *circonscrite au triangle* ABC, *est une droite passant par les points de contact de la conique* γ *avec la conique circonscrite au triangle* ABC *et bitangente à* γ.

Quant à l'enveloppe de la conique γ', c'est une courbe unicursale du cinquième ordre admettant les points A, B, C, pour points doubles.

Enfin, le cas particulier de la cardioïde donne un théorème relatif à la parabole et aux trois cercles que l'on peut mener tangentiellement à cette courbe par son foyer et un point P

de son plan : *Le lieu du point* P, *tel que les points de contact des cercles précédents avec la parabole soient situés sur une circonférence passant par son foyer* F, *est une droite symétrique de la directrice par rapport au point* F.

EXERCICE ÉCRIT

59. — *En un point* A *d'une ellipse* (E), *outre le cercle osculateur en* A, *il passe par ce point trois autres cercles osculateurs en* B, C, D. *Steiner et Joachimsthal ont montré que les quatre points* A, B, C, D *se trouvent sur une même circonférence et que le centre de gravité du triangle* BCD *était au centre de l'ellipse* (E).

Montrer de plus, quand le point A *se déplace sur* (E) *les propriétés suivantes :*

1° *Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* BCD *est une ellipse;*

2° *Les trois normales en* B, C, D *sont concourantes;*

3° *Le lieu du point de concours* P *de ces normales est une ellipse;*

4° *Si* ω *est le centre du cercle* BCD, *et* O *celui de l'ellipse, on a la relation* $OP = 2O\omega$;

5° *L'hyperbole d'Apollonius, relative au point* P, *enveloppe une kreuzcurve;*

6° *Les côtés du triangle* BCD *enveloppent une ellipse;*

7° *La somme des carrés des côtés de ce triangle est constante.*

(E. N. Barisien.)

Notes sur l'exercice 58.

1° La lemniscate ayant pour équation

(1) $$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),$$

l'équation d'un cercle passant par le centre de la lemniscate est

(2) $$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y = 0,$$

(α, β) étant le centre du cercle. En éliminant (x^2+y^2) entre ces deux équations, on obtient

$$4(\alpha x+\beta y)^2 = a^2(x^2-y^2),$$

ou, en posant $\dfrac{y}{x} = \mu$,

(3) $$\mu^2(4\beta^2+a^2)+8\alpha\beta\mu+(4\alpha^2-a^2) = 0.$$

C'est l'équation des coefficients angulaires des deux droites OA et OB joignant le centre O de la lemniscate aux points d'intersection A, B du

cercle avec la lemniscate. Pour que ces droites OA et OB se confondent, il faut que les deux racines de (3) soient égales; écrivons donc

$$16\alpha^2\beta^2 - (4\beta^2 + a^2)(4\alpha^2 - a^2) = 0.$$

ou

(4) $$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Ainsi le cercle doit avoir son centre sur l'*hyperbole* (4).

— La valeur de μ correspondant à la racine double est

$$\mu = -\frac{4\alpha\beta}{4\beta^2 + a^2} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Le point de contact du cercle est donc à l'intersection de la lemniscate avec la droite

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}x.$$

Cette droite est symétrique de la droite joignant le point O au centre du cercle.

Il résulte de ce qui précède la propriété suivante :

D'un point C *quelconque d'une hyperbole équilatère, on décrit un cercle de rayon* OC *; on mène une droite* OM *symétrique de* OC *par rapport à l'axe : son second point de rencontre* M *avec le cercle appartient à une lemniscate de longueur d'axe double de celui de l'hyperbole équilatère.*

2°. — Posons

(5) $$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Si nous éliminons x et y entre (1) (2) et (5), nous obtiendrons l'équation des rayons vecteurs OA et OB. Or, en combinant (1) et (5), on trouve

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$
$$x^2 - y^2 = \frac{\rho^4}{a^2}.$$

D'où $$x^2 = \frac{\rho^2(a^2 + \rho^2)}{2a^2} \qquad y^2 = \frac{\rho^2(a^2 - \rho^2)}{2a^2}.$$

En portant dans (2) et faisant disparaître les radicaux, on obtient l'équation bicarrée

$$\rho^4[(2\alpha^2 - 2\beta^2 - a^2)^2 + 16\alpha^2\beta^2] + 4a^2(\alpha^2 + \beta^2)(2\alpha^2 - 2\beta^2 - a^2)\rho^2 + 4a^4(\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0.$$

Exprimons que

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = a^2;$$

ρ_1^2 et ρ_2^2 étant les deux racines de cette équation en ρ^2.

On a ainsi

$$(2\alpha^2 - 2\beta^2 - a^2)^2 + 16\alpha^2\beta^2 + 4(\alpha^2 + \beta^2)(2\alpha^2 - 2\beta^2 - a^2) = 0$$

ou $$[(2\alpha^2 - 2\beta^2 - a^2) + 2(\alpha^2 + \beta^2)]^2 - 4(\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0,$$

$$(4\alpha^2 - a^2)^2 - 4(\alpha^2 - \beta^2) = 0,$$

équation qui se décompose en

$$(2\alpha^2 + 2\beta^2 - a^2)(6\alpha^2 - 2\beta^2 - a^2) = 0.$$

On a bien ainsi pour le lieu de (α, β) un *cercle* et une *hyperbole*.

Nota. — Cette solution est de M. E. N. Barisien.

QUESTIONS D'EXAMENS

1. — *Étudier la série dont le terme général est*

$$u_n = \frac{A}{\sqrt[n]{n^k}},$$

A, k *désignant des constantes, indépendantes de* n.

Posons $y = n^{\frac{k}{n}}$;

nous avons $Ly = k.\frac{Ln}{n}$.

Pour $n = \infty$, Ly tend vers zéro; donc y a pour limite l'unité. La série est divergente,

Si, plus généralement, on considère la série telle que

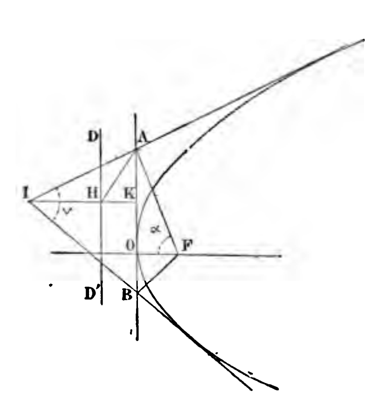
$$u_n = \frac{A}{n^p \sqrt[n]{n^k}},$$

on voit que si $p = 1$, lim. u_n a pour limite 1 ; la série est divergente. Elle est divergente, *a fortiori*, pour $p < 1$. Mais elle est convergente pour $p > 1$.

2. — *Lieu des points* I *d'où l'on peut mener, à une parabole* P, *deux tangentes faisant un angle donné* V.

Cette question, très connue, conduit, pour le lieu cherché à l'équation

$$(1) \quad \operatorname{tg}^2 V \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 - 2px.$$



Ce résultat donne lieu à quelques remarques intéressantes.

On voit d'abord que (1) représente une hyperbole doublement tangente à P aux points μ, μ' (imaginaires) où la directrice rencontre P. Ces points peuvent se prévoir *a priori*. En effet, les tangentes issues du foyer touchent P en ces points μ, μ' et elles sont isotropes. Une droite isotrope fait, avec elle-même un angle quelconque. On peut donc dire que, au point de vue analytique, les tangentes issues de μ, ou de μ', font l'angle donné V.

On observera aussi que l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\text{A} \qquad \frac{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}{\cos^2 V} = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

Elle est donc *confocale* à la parabole donnée.

En général, si deux coniques Γ, Γ' sont telles que Γ' soit doublement tangente à Γ aux points où elle est coupée par l'une de ses directrices, Γ' est confocale à Γ.

En effet, on a, avec la notation habituelle,

$$\Gamma \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - D^2,$$

et $$\Gamma' \equiv \Gamma + \lambda D^2;$$

par suite $$\Gamma' \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (\lambda - 1)D^2.$$

Sous cette forme, la propriété est manifeste; α, β représentent les coordonnées d'un foyer de Γ'.

On peut d'ailleurs, bien simplement, par des considérations élémentaires, trouver le lieu proposé.

Les tangentes considérées rencontrent la tangente au sommet en des points A, B; traçons FA, FB et posons

$$\text{OFA} = \alpha, \qquad \text{OFB} = \beta.$$

Si nous abaissons IK sur AB, nous avons (*).

$$\text{OA.OB} = \text{IK.OF} = \frac{p}{2}\left(\text{IH} + \frac{p}{2}\right).$$

Or $$\text{OA} = \frac{p}{2}\,\text{tg}\,\alpha, \qquad \text{OB} = \frac{p}{2}\,\text{tg}\,\beta;$$

donc

(1) $$\text{IH} + \frac{p}{2} = \frac{p}{2}\,\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta.$$

D'autre part,

(2) $$\text{AB} = \text{OA} + \text{OB} = \frac{p}{2}\left(\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta\right).$$

Des égalités (1), (2) on conclut

$$\frac{\text{AB}}{\text{IH}} = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta - 1} = \text{tg AIB} = \text{tg V}.$$

Enfin, en observant que $$\text{IF} = \frac{\sin V}{\text{AB}},$$

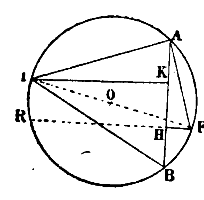
on a

(3) $$\frac{\text{IH}}{\text{IF}} = \cos V;$$

égalité que nous voulions établir directement, mais qui résulte, immédiatement, de l'équation (*) obtenue plus haut.

(*) Cette propriété est manifeste dans tout quadrilatère possédant deux angles opposés droits.

En effet, le point O, centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère, étant le milieu de IF, se projette, sur AB, au milieu de KH.



Or $$\text{FH.HR} = \text{HB.HA}.$$

Et comme $$\text{HR} = \text{IK},$$

on a finalement $$\text{FH.IK} = \text{HB.HA}.$$

Si l'on veut une démonstration plus élémentaire, n'invoquant pas le théorème cité, on observera que les triangles AKH, OFB ont leurs côtés égaux et parallèles; AH est donc parallèle à PB; par suite, perpendiculaire à IB. On voit ainsi que H est l'orthocentre de AIB.

Enfin, en prolongeant les droites FA, FB jusqu'à leur rencontre avec la directrice DD', on peut observer que l'on obtient deux points qui appartiennent à un cercle de centre I et de rayon IF, et qui sont vus de I sous un angle 2V.

La relation (3) résulte encore immédiatement de cette remarque.

Autrement. — L'orthocentre du triangle AIB appartient à la directrice; donc H coïncide avec ce point. Une relation connue donne

$$AB = IH \operatorname{tg} V,$$

Mais

$$AB = IF \sin V$$

donc etc...

3. — *Étant donnée l'équation*

$$f(x) - f(y) = 0,$$

dans laquelle f(x) *désigne une fonction entière du troisième degré, démontrer que l'on peut vérifier cette équation par les valeurs*

$$x = \frac{\varphi(t)}{\chi(t)}, \qquad y = \frac{\psi(t)}{\chi(t)},$$

φ, ψ, χ *étant des polynômes du second degré en* t.

(*École normale.*)

Il suffit d'observer que $\left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right)$

est une fonction du second degré en x, y, Or, les coniques sont des courbes unicursales. (V. *Géom. An.* p. 555.)

4. — *On donne deux points* A, A' *et deux droites* Δ, Δ'.

Soit Γ *une conique telle que* A *soit le pôle de* Δ, A' *le pôle de* Δ'.

Trouver le lieu des pôles d'une droite fixe Δ'', *par rapport à* Γ. *Lieu des centres de* Γ.

Prenons pour triangle de référence celui qui est formé par les droites Δ, Δ' et AA'.

Soient $\quad P = o. \quad Q = o, \quad R = o$

les équations de ces droites (notation abrégée).

L'équation de Δ est

$$f = AP^2 + A'Q^2 + A''R^2 + 2BQR + 2B'PR + 2B''PQ = o.$$

Il faut exprimer que la polaire du point O est représentée par $R = o$.

En général, la polaire d'un point x_0, y_0, z_0 est donnée par

$$P_0 f'_P + Q_0 f'_Q + R_0 f'_R = o.$$

Au point o, on a $P_0 = o$, $Q_0 = o$; l'équation de la polaire de O est donc

$$f'_R = o,$$

ou

$$A''R + B'P + BQ = o.$$

On conclut de là $\quad B' = o, \quad B = o.$

Il reste à exprimer que les polaires des points A, A' sont des droites données.

La polaire de A $(P_0 = o,\ R_0 = o)$ a pour équation $f'_Q = o$, c'est-à-dire :

$$A'Q + B''P = o.$$

Cette droite étant déterminée, on a

$$A' = k'B'',$$

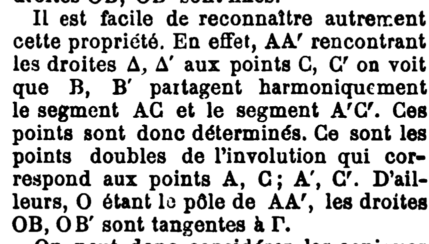
k' désignant une constante donnée.

On trouve, de même, $A = kB''$.

Ainsi l'équation générale du réseau des coniques Γ est

$$kP^2 + k'Q^2 + \lambda R^2 + 2PQ = 0.$$

En interprétant ce résultat, géométriquement, on voit que Γ coupe AA' en des points fixes B, B' et que les droites OB, OB' sont fixes.



Il est facile de reconnaître autrement cette propriété. En effet, AA' rencontrant les droites Δ, Δ' aux points C, C' on voit que B, B' partagent harmoniquement le segment AC et le segment A'C'. Ces points sont donc déterminés. Ce sont les points doubles de l'involution qui correspond aux points A, C; A', C'. D'ailleurs, O étant le pôle de AA', les droites OB, OB' sont tangentes à Γ.

On peut donc considérer les coniques Γ comme tangentes à deux droites fixes, en des points fixes.

Les lieux proposés sont donc des droites (*). Voici d'ailleurs la solution analytique.

Soient x_1, y_1 les coordonnées du pôle de Δ'', relativement à Γ. L'équation de Δ'' sera

$$P(kP_1 + Q_1) + Q(k'Q_1 + P_1) + \ldots = 0\,;$$

et comme cette droite est donnée, on a

$$kP_1 + Q_1 = k''(k'Q_1 + P_1).$$

En rendant x_1, y_1 coordonnées courantes, on voit que le lieu est une droite passant par O.

Pour avoir le lieu des centres, il suffit de supposer que Δ'' est la droite de l'infini. Le seul changement dans le calcul qui vient d'être fait, consiste à modifier la valeur de k''. La méthode précédente est propre à mettre en lumière ce fait, qu'établit aussi la transformation par perspective, que les lieux des pôles d'une droite fixe, sont homographiques des lieux décrits par le centre, dans un réseau de coniques.

5. — *Développement de* ARC SIN x *en série.*

Ce développement, exposé dans tous les traités de Calcul différentiel (voyez, par exemple, Bertrand, p. 305), peut se démontrer de la manière suivante :

Posons $u = \text{arc sin } x$

et soit u^p la dérivée d'ordre p.

Nous avons d'abord $u'\sqrt{1 - x^2} = 1$,

puis $$u''\sqrt{1 - x^2} - u'\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

ou $$u''(1 - x^2) - u'x = 0.$$

(*) Dans l'énoncé, emprunté à la collection Croville-Morant (Examens de 1891, p. 79), on indique, par erreur, croyons-nous, que ces lieux sont du second degré.

En appliquant la formule de Leibniz, prenant n fois la dérivée, on a

$$u^{n+2}(1 - x^2) - (2n + 1)xu^{n+1} - n^2u^n = 0.$$

Pour $x = 0$, on a

$$u_0 = 0, \quad u_0' = 1, \quad u_0'' = 0, \quad u_0''' = 1^2, \ldots$$

En général

$$u_0^{2k} = 0, \quad u_0^{2k+1} = [1.3\ldots(2k - 1)]^2.$$

La formule de Taylor donne donc

$$\text{arc sin}\, x = x + \frac{x^3(1)^2}{3!} + \frac{x^5(1.3)^2}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}(1.3\ldots2n-1)^2}{(2n+1)!} + \rho_n,$$

ρ_n désignant le terme complémentaire. La convergence de la série qui figure dans ce développement s'établit facilement en prenant le rapport d'un terme au précédent. Ce rapport, dans le cas présent, est

$$x^2 \frac{(2n - 1)^2}{2n(2n + 1)}.$$

Pour $n = \infty$, la valeur du rapport est égale à x^2. La série est certaineemnt convergente quand le module de x est inférieur à 1, etc.

ÉCOLE CENTRALE

CONCOURS DE 1891 (1re SESSION).

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires ox, oy et sur l'axe de x un point A dont l'abscisse est a. On considère le faisceau des ellipses pour lesquelles le point O est un sommet d'axe non focal, et la parallèle à l'axe de y menée par le point A une directrice.

I. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que deux ellipses du faisceau considéré passent par un point donné P, est que ce point soit à l'intérieur du cercle qui a le point O pour centre et OA pour rayon.

II. Démontrer que ce cercle a un double contact, réel ou imaginaire avec chacune des ellipses du faisceau.

III. Limiter les régions du plan dans lesquelles doit être situé un point P :

1° Pour qu'*une seule* des deux ellipses du faisceau qui passent par ce point ait avec le cercle un double contact réel;

2° Pour que *chacune des deux ellipses* du faisceau qui passent par ce point ait avec le cercle un double contact réel ;

3° Pour qu'*aucune* des deux ellipses n'ait avec le cercle un double contact réel.

IV. Lieu des pieds des normales menées par le point O à toutes les ellipses du faisceau.

Epure *(Cylindre limité par une surface gauche).*

Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre et à 100^{mm} du grand côté inférieur. Porter sur cette ligne, à partir du petit côté gauche du cadre une longueur de 190^{mm}. Le point ainsi obtenu est la projection horizontale de l'axe vertical d'une surface gauche de révolution. Le cercle de gorge, qui a 30^{mm} de rayon, est projeté verticale à 80^{mm} au-dessus de xy. La droite de front qui engendre la surface gauche est projetée en avant de xy et sa trace horizontale à 30^{mm} du petit gauche du cadre, de sorte que sa pente est $\frac{1}{2}$.

Sur la trace horizontale de cette génératrice on fait passer un cercle de 40^{mm} de rayon dont le centre est à 50^{mm} en avant de xy et plus rapproché de l'axe de la surface gauche que ne l'est la trace horizontale de la génératrice. Ce cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la génératrice de front donnée de la surface gauche.

Représenter par les projections et ses contours apparents la portion du cylindre, supposé plein et opaque, comprise entre le plan horizontal de projection et le plan horizontal situé à 160^{mm} au-dessus de celui-ci et extérieure à la surface gauche.

L'extérieur de la surface gauche est la portion de l'espace où n'est pas située l'axe de révolution.

Déterminer un point quelconque de la courbe, la tangente en un point, les points extrêmes, les points situés sur les contours apparents et les asymptotes.

Cadre 450 sur 270.

(2e SESSION).

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires et un cercle C passant par l'origine et dont le centre a pour coordonnées $x = -\frac{a}{2}$ $y = -\frac{b}{2}$. Dans ce cercle on mène deux cordes de longueur d passant par l'origine. D'un point de l'axe de x dont l'abscisse est p on mène des droites perpendiculaires à ces cordes.

1° Trouver l'équation Δ du lieu des points tels que le produit de leurs distances aux cordes soit dans un rapport donné λ avec le produit de leurs distances aux droites perpendiculaires à ces cordes; lieu des centres des coniques représentées par l'équation Δ quand λ varie;

2° Discuter la nature des coniques représentées par l'équation Δ.

3° Le rapport λ étant choisi de façon que la conique Δ devienne un cercle, trouver le lieu du centre de la courbe lorsque le centre du cercle C décrit l'hyperbole $x^2 + nxy + \frac{d^2}{4}$.

Épure. (Intersection de cônes. — Assemblage de cônes.)

Ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre, à 240^{mm} du petit côté inférieur. Cadre 450^{mm} sur 270.

On donne deux cônes de révolution. Les deux axes (Oz, $O'z'$) et

ωt, $\omega' t'$) sont de front, inclinés à 45° sur le plan horizontal et perpendiculaires entre eux. Le plan de front qui les contient est à 110mm en avant du plan vertical. La cote du sommet OO' est de 110mm, celle du sommet $\omega\omega'$ est de 80mm. La distance Oω est de 60mm, le milieu de Oω est à égale distance des grands côtés du cadre. Le demi-angle au sommet de chacun des cônes est de 45°.

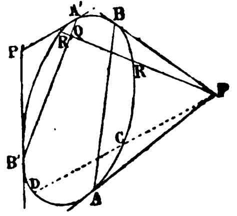
Représenter par ses projections, ses contours apparents et leur ligne d'intersection l'ensemble des deux cônes terminés d'une part au plan horizontal de projection et d'autre part au plan horizontal dont la cote est 170mm.

Constructions pour déterminer un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point, un point quelconque de chacune des sections planes qui limitent le cône et les tangentes en ces points.

QUESTION 273

Solutions par M. G. Leinekugel.

Théorème I. — *On donne un point* P, *une droite* A'B' *et une conique* Σ. *Une transversale, tournant autour du point* P, *coupe la droite en un point* Q, *et la conique, en deux points* R, R'. *Si l'on prend les points doubles de l'involution déterminée, sur la transversale, par les deux couples de points* P, Q *et* R, R', *le lieu de ces points doubles est une conique* Σ'.



Théorème II. — *On donne une droite, une conique* Σ *et deux divisions homographiques sur cette conique.*

Les tangentes à la conique, en deux points homologues A, B, *rencontrent la droite en deux points; les droites qui joignent ces deux derniers points au pôle de la droite des points doubles coupent la corde* AB *en des points dont le lieu est une conique.*

Quand la droite donnée est tangente a Σ, *le lieu est un système de deux droites.* (Tarry.)

I. Solution géométrique. — Projetons la figure de manière que A'B' passe à l'infini et que (Σ) devienne un cercle; nous sommes ramené à la question suivante : Étant donnés un cercle (σ) et une série de droites pivotant autour d'un point p, lieu des points doubles de l'involution déterminée par les deux

couples de points (r, r'), (p, ∞). Comme p est le point central et que l'on a $\overline{pm}^2 = \overline{pt}^2 = pr \times pr'$, [$t$ étant le point de contact de la tangente menée de p à (σ)] on voit que le lieu des points doubles m est le cercle (σ') orthogonal au cercle (σ) et de centre p.

En revenant à la figure primitive, on voit que le lieu des points doubles est une conique (Σ') circonscrite au quadrilatère déterminé par la conique (Σ) et les deux droites A'B', AB [AB est la polaire de P par rapport à (Σ)]. Les tangentes en ces points à la conique (Σ') sont les droites PA', PB', P'A, P'B [P' est le pôle de A'B' par rapport à (Σ)]. On déduit, de là, ce théorème :

On considère un quadrilatère circonscrit à une conique (Σ), *deux sommets opposés, les droites qui joignent ces sommets aux points de contact des côtés du quadrilatère avec* (Σ) *sont quatre tangentes en ces points, à une même conique* (Σ').

Cherchons l'autre sécante commune à (Σ), (Σ'); cette droite s'obtient en retranchant leurs équations et nous trouvons

$$lxz + myz + 2nz^2 = z(lx + my + 2nz) = 0.$$

Or $lx + my + 2nz = 0$ représente la polaire AB de P par rapport à (Σ) ; le théorème I se trouve donc démontré.

II. — Les droites AB enveloppent une conique (Σ') bitangente à (Σ) la corde des contacts étant la ligne des points doubles (Tr. des S. C. *Chasles*). Le pôle de cette droite par rapport à (Σ) décrit également une conique (Σ_1). En prenant comme triangle de référence celui qui est formé par la corde des contacts des coniques (Σ), (Σ') et par les deux tangentes aux extrémités, les équations de (Σ), (Σ_1) sont de la forme :

(Σ) $$xy - a^2z^2 = 0$$

(Σ_1) $$xy - a_1^2z^2 = 0.$$

L'équation du système des deux tangentes AP, BP à (Σ) en A, B est par suite

(1) $$4(x_0y_0 - a^2z_0^2)(xy - a^2z^2) = [xy_0 + yx_0 - 2a^2zz_0]$$

ou (x_0y_0) coordonnées de P vérifient la relation :

$$x_0y_0 - a_1^2z_0^2 = 0.$$

Si

(2) $$vx + vy + wz = 0$$

est l'équation de la droite donnée, celle du système des droites

joignant les points communs à (1) et (2) est, par suite,

$$(3)\qquad 4(x_0y_0 - a^2z_0^2)[w^2xy - a^2(vx + vy)^2] = [w(xy_0 + yx_0) + 2a^2z_0(vz + vy)]^2.$$

Le lieu s'obtiendra donc par l'élimination de x_0, y_0, z_0 entre (3), (5) l'équation de AB qui est la polaire de P.

$$(4)\qquad xy_0 + yx_0 - 2a^2zz_0 = 0$$

et l'équation de condition $x_0y_0 - a_1^2z_0^2 = 0$. Cette élimination est immédiate et donne :

$$(a_1^2 - a^2)[w^2xy - a^2(vx + vy)^2] = [vx + vy + wz]^2a^4.$$

Ce lieu est une conique rencontrant (Σ) aux points où la droite donnée A′B′ la rencontre, les tangentes à cette conique, en ces points, passent en P′, pôle de la droite A′B′, par rapport à Σ. L'autre sécante commune passe par l'intersection des droites A′B′, AB et a pour équation :

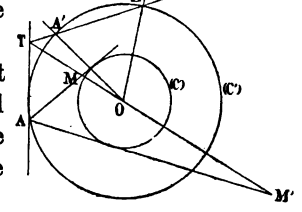
$$wz - wx - wy = \frac{a^2}{a_1^2 - a^2}(vx + vy + wz)$$

ou $\quad vx + vy = wz . \left[- 1 + \frac{a_1^2}{a^2}\right] vx + vy + wz = wz . \frac{a_1^2}{a^2}.$

On peut simplifier la démonstration de ce théorème en projetant les deux coniques (Σ) (Σ') de façon qu'elles deviennent deux cercles concentriques, et l'on est ramené à la proposition suivante :

Étant donnés deux cercles concentriques (C) (C′) *et une droite* Δ, *on mène une tangente* AT *à l'un des cercles laquelle rencontre* Δ *en un point que l'on joint au centre commun. Cette droite rencontre les deux tangentes au second cercle menées par le point de contact de la première en des points* M, M′ *qui décrivent une conique.*

Ces points M, M′ appartiennent à une conique tangente en A′, B′ aux droites OA′, OB′ *(fig. 2).*



La propriété corrélative n'offre aucun intérêt à être citée.

Il est évident que le lieu devient un système de deux droites quand la droite A′B′ est tangente à Σ. Le point de contact est un point double de cette conique singulière.

Remarque. — Le théorème I permet d'énoncer la propriété suivante :

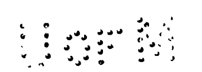
Théorème. — *Étant donnée une quadrique* (Σ), *un plan* Q *et un point* P; *autour de ce point pivotent des droites. Sur chacune de ces droites on prend les points doubles de l'involution déterminée par les deux couples de points* P, Q; r, r′ [q, r, r′ *étant les points de rencontre de la droite avec le plan* Q *et avec la quadrique*]. *Ces points se déplacent sur une quadrique* (Σ').

Cette quadrique est évidemment inscrite aux deux cônes du second ordre dont le lieu a pour sommet P et pour directrice la conique de section de (Σ) avec Q; l'autre a pour sommet le pôle de Q, par rapport à (Σ), et pour directrice la conique de section de (Σ) avec le plan polaire de P. Cette quadrique (Σ') est encore le *lieu des coniques de section des plans polaires de* P *par rapport à toutes les quadriques passant par les coniques d'intersection de* Σ *et de* Q *et d'un plan quelconque passant par* P.

On peut se proposer de déterminer les directions asymptotiques de la conique (Σ') : il suffit de déterminer les droites pour lesquelles les milieux des segments PQ, RR′ coïncident.

Or, le lieu des milieux des segments PQ est une droite δ parallèle à A′B′, celui des milieux des segments R, R′ est une conique (S) passant par P et par A, B, et homothétique à la conique (Σ). Les points I, I′, communs à δ et à (S), joints à P, donnent les directions asymptotiques de (Σ'). On voit donc que c'est de l'intersection de δ et de (S), que dépend le genre de (Σ'). Les points I, I′, qui appartiennent à Σ' sont les points doubles des deux divisions homographiques déterminées, sur δ, par les droites (BA, PA), par les deux couples de droites menées par les points P, B, parallèlement aux asymptotes de (Σ).

Remarque. — Si l'on considère une conique (Σ), une droite A′B′, un point P et une droite CD passant par ce point, les deux coniques circonscrites au quadrilatère A′B′CD et tangentes à la droite PRR′ touchent, comme on le sait, cette droite aux deux points doubles de l'involution déterminée par les deux couples de points (P, Q) (R, R′). La conique (Σ') peut donc être considérée comme le lieu des points de contact des tangentes, menées par P, aux coniques circonscrites au quadrilatère A′B′CD. Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'elle ne varie pas quand la droite PCD pivote autour de P.



La propriété corrélative est la suivante :

Étant donnés une conique (Σ), *un point* P *et une droite* Δ, *on joint un point variable* M *de la droite au point* P ; *on mène, de ce point, les deux tangentes* MR, MR′ *à* (Σ). *L'enveloppe des rayons doubles de l'involution déterminée par les deux couples de rayons* (MP, MΔ) (MR, MR′) *est une conique* (Σ').

Remarque II. — La conique (Σ') se réduit à deux droites quand A′B′ est tangent à (Σ). Le point de contact est en effet, dans ce cas, un point double de (Σ') ; ces deux droites sont alors (A′A, A′B).

Solution analytique. — I. Le triangle PA′B′ est pris pour triangle de référence [f(1)] ; l'équation de (Σ) est

$$(\Sigma) \qquad lxz + myz + qxy + nz^2 = 0.$$

L'équation du système des droites A′P, A′Q est :

$$yz = 0.$$

Celle des droites A′R′, A′R est, si $\lambda y = x$ est l'équation de PRR′ :

$$\lambda y\,(lz + qy) + myz + nz^2 = 0,$$

ou

$$\lambda qy^2 + yz\,(m + \lambda l) + nz^2 = 0.$$

L'équation du système des droites qui joignent les points doubles à A′ est de la forme

$$y^2 - \mu z^2 = 0,$$

μ étant déterminée par la relation $n = \lambda q\mu$ exprimant que ces dernières droites forment avec A′R, A′R′, un faisceau harmonique. Le lieu s'obtient donc par l'élimination de λ entre les deux équations

$$\lambda qy^2 - nz^2 = 0, \qquad \lambda y - x = 0,$$

ce lieu est par suite la conique (Σ') représentée par

$$qxy - nz^2 = 0 ;$$

on voit, sur cette équation, qu'elle passe par A′, B′, tangentiellement à PA′, PB′.

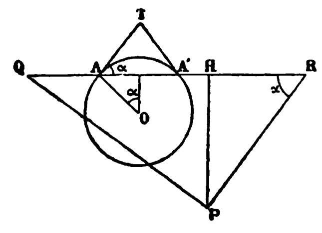
Note (*). — Dans le cas particulier où la courbe et la droite données sont une circonférence et la droite à l'infini, on déduit du théorème II ce corollaire assez intéressant :

Étant données deux divisions homographiques sur un cercle,

(*) Cette note est de M. Tarry.

les longueurs des cordes qui joignent des points homologues sont proportionnelles à leurs distances au pôle de la droite des points doubles.

Considérons la droite à l'infini ; en vertu du théorème II on a les propriétés suivantes :



La parallèle menée par le point P aux tangentes au cercle en A et A' rencontre A et A' en des points R, P situés sur un cercle de centre P.

La distance PH est proportionnelle au sinus de l'angle α, puisque PR est une longueur constante.

La longueur de la corde AA' est aussi proportionnelle à sin α, donc, etc.

Le rapport de ces longueurs est égal à celui des rayons des cercles O et P.

P est le point de Lemoine des cordes AA'.

QUESTION 316

Solution par M. J. Greenstreet M. A. *(The Marling School, Stroud.)*

D'un point M, *on mène, à une parabole* P, *trois normales* MA, MB, MC. *Les tangentes aux points* A, B, C *forment un triangle* A'B'C'. *Soit* O' *le centre de la circonférence circonscrite à* A'B'C'.

Démontrer que Mω *passe par le foyer* F *de* P *et que l'on a*

$$2O'F = FM. \qquad \text{(G. L.)}$$

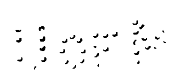
On peut facilement obtenir l'équation du cercle circonscrit à A'B'C' (*)

$$(x - a)(x + \xi - 2a) + y(y + \eta) = 0,$$

où M est le point ξ, η.

Or, F est (a, o) et ω est $\left(\dfrac{3a - x'}{2}, \ \dfrac{-y'}{2}\right)$;

(*) Dans ce calcul, suivant la notation anglaise, a représente le quart du paramètre, la quantité $\frac{p}{2}$, dans la notation française.



donc l'équation de MO' est $x\eta + (a - \xi)y - a\eta = 0$, et M$\omega$ passe par (a, o).

Aussi

$$(\mathrm{FO'})^2 = \frac{(a-\xi)^2}{4} + \frac{y'^2}{4} = \frac{1}{4}\left[(a-\xi)^2 + \eta^2\right] = \frac{1}{4}(\mathrm{FM})^2,$$

ou

$$2\mathrm{FO'} = \mathrm{FM}.$$

Autrement. — Le cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes à $y^2 = 4ax$ aux pieds des normales abaissées d'un point $\mathrm{M}(x', y')$ a pour équation

$$\left(x - \frac{3a - x'}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{y'}{2}\right)^2 = \frac{(a-x')^2 + y'^2}{4},$$

par suite, le centre ω a pour coordonnées

$$\frac{3a - x'}{2}, -\frac{y'}{2},$$

et l'équation de MO' est

$$xy' + (a - x')y - ay' = 0.$$

Ainsi on voit que Mω passe par le foyer a, o,

$$4\mathrm{O'F}^2 = 4\ (\text{le rayon du cercle})^2 = 4\left(\frac{\overline{a - x'}^2 + y'^2}{4}\right)$$
$$= \overline{a - x'}^2 = \mathrm{FM}^2.$$

Nota. — Autre solution par M. Warocquier.

Seconde solution par M. H. Brocard.

La parabole (P), rapportée à son axe SX et à la tangente SY au sommet, a pour équation

(P) $$y^2 = 2px.$$

Les points B, C ont pour coordonnées :

(B) $$x = \frac{b^2}{2p}, \qquad y = -b,$$

(C) $$x = \frac{c^2}{2p}, \qquad y = -c;$$

et les normales BM, CM se rencontrent au point M qui a pour coordonnées :

(M) $$x = p + \frac{b^2 + bc + c^2}{2p}, \qquad y = \frac{bc(b+c)}{2p^2}.$$

On sait que le centre de gravité G du triangle ABC doit se trouver sur SX. Le point A a donc pour coordonnées :

$$\text{(A)} \qquad x = \frac{(b+c)^2}{2p}, \qquad y = b + c;$$

et le point G :

$$\text{(G)} \qquad x = \frac{b^2 + bc + c^2}{3p}, \qquad y = 0.$$

En outre, la circonférence ABC passe par le sommet S. Elle a pour équation :

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2 + bc + c^2 + 4p^2}{2p} x - \frac{bc(b+c)}{4p^2} y = 0;$$

et, pour centre, le point O :

$$\text{(O)} \qquad x = p + \frac{b^2 + bc + c^2}{4p}, \qquad y = \frac{bc(b+c)}{8p^2}.$$

Des formules précédentes on conclut aussi les coordonnées de l'orthocentre H :

$$x = -2p + \frac{b^2 + bc + c^2}{2p}, \qquad y = -\frac{bc(b+c)}{4p^2}.$$

Cela posé, les tangentes AB'C', BA'C', CA'B', déterminent les points A', B', C' dont les coordonnées sont, respectivement :

$$\text{(A')} \qquad x = \frac{bc}{2p}, \qquad y = -\frac{b+c}{2};$$

$$\text{(B')} \qquad x = -\frac{c(b+c)}{2p}, \qquad y = \frac{b}{2};$$

$$\text{(C')} \qquad x = -\frac{b(b+c)}{2p}, \qquad y = \frac{c}{2}.$$

On en conclut que ce triangle a également son centre de gravité G' sur SX; le point G' a pour coordonnées

$$\text{(G')} \qquad x = -\frac{b^2 + bc + c^2}{6p}, \qquad y = 0.$$

Il est le complémentaire du point G par rapport au sommet S. On pourra reconnaître, en outre, que l'orthocentre H' de ce triangle est sur la directrice. Il a, en effet, pour coordonnées :

$$\text{(H')} \qquad x = -\frac{p}{2}, \qquad y = \frac{bc(b+c)}{2p^2}.$$

On en déduirait, par la relation connue, le centre O' de la circonférence A'B'C' :

$$\text{(O')} \qquad x = \frac{p}{4} - \frac{b^2 + bc + c_2}{4p}, \qquad y = -\frac{bc(b+c)}{4p^2}.$$

Quant à cette circonférence, elle a, comme on sait, pour rayon O'F.

Mais les formules (O')(F)(M) montrent que ces trois points O', F, M, sont en ligne droite et que O' est le complémentaire de M.

On en conclut $\frac{O'F}{O'M} = \frac{1}{3}$, $\quad 2O'F = FM$.

Note I. — Les points et lignes, considérés ci-dessus, présentent d'autres propriétés dignes de remarque.

Le centre E' du cercle des neuf points (ou cercle d'Euler) du triangle A'B'C', ou, par définition, le milieu de O'H', a pour coordonnées

$$(E') \qquad x = -\frac{p}{8} - \frac{b^2 + bc + c^2}{8p}, \qquad y = \frac{bc(b + c)}{8p^2}.$$

Ainsi, les lignes MH', OE', HO' sont parallèles à GSG'. De plus, on peut reconnaître que HO' = MH'.

La figure MH'O'H est donc un parallélogramme.

Les circonférences O, E' passent par le sommet S et ont pour axe radical SY.

L'hyperbole équilatère (Λ') A'B'C'H' passe par le point E' et par le point T, symétrique du point H', par rapport à l'origine S. En d'autres termes, cette hyperbole a pour centre le point S, et pour asymptotes SX, SY. Le point T est à l'intersection de la circonférence A'B'C'F et de la perpendiculaire TF menée à SX, par le foyer F. L'hyperbole (Λ') a donc pour équation

$$(\Lambda') \qquad xy = -\frac{bc(b + c)}{4p}.$$

D'autre part, les points A, B, C, H déterminent une seconde hyperbole équilatère (Λ) ayant pour équation

$$(\Lambda) \qquad y\left(x - \frac{b^2 + bc + c^2}{2p}\right) = \frac{bc(b + c)}{2p}.$$

On voit que cette courbe passe par le point M et qu'elle admet SX pour une de ses asymptotes.

Son centre N a pour coordonnées :

$$(N) \qquad x = \frac{b^2 + bc + c^2}{2p}, \qquad y = 0.$$

Ces deux hyperboles (Λ)(Λ') se rencontrent en un point L

dont les coordonnées sont, par conséquent :

$$\text{(L)} \quad x = \frac{b^2 + bc + c^2}{6p}, \qquad y = -\frac{3bc(b+c)}{2(b^2 + bc + c^2)}.$$

Ainsi, l'abscisse de ce point est égale et de signe contraire à celle du point G'.

Le milieu E de OH (centre du cercle d'Euler du triangle ABC) a pour coordonnées :

$$\text{(E)} \quad x = -\frac{p}{2} + 3\,\frac{b^2 + bc + c^2}{8p}, \qquad y = -\frac{bc(b+c)}{16p}.$$

II. — Le développement donné à la solution de la question a pour but de signaler à nos lecteurs les intéressantes propositions qui font l'objet des questions 1515 (Chauliac) et 1591 (Lemaire) publiées en 1885 et en 1890 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Voir aussi *J. S.*, question 236, 1890, p. 275 et 1891, p. 45.

NÉCROLOGIE

Je viens d'apprendre avec regret la mort de M. G. Frontera, décédé à Paris le 21 août dernier.

G. Frontera a été longtemps mon collègue au lycée Charlemagne; c'était une âme droite, un homme de bien. Sa vie tout entière, sa vie intime surtout qu'il m'a contée si souvent quand nous revenions ensemble de Charlemagne vers notre quartier commun, est là pour témoigner de ce jugement.

Les soucis de la vie l'ont empêché, je crois, de produire beaucoup; il laisse pourtant, outre sa thèse et des traductions diverses, une Géométrie analytique, faite autrefois en collaboration avec Sonnet, et qui est arrivée aujourd'hui à sa sixième édition. La traduction espagnole de cette Géométrie, est, en Espagne, un ouvrage classique et G. Frontera avait été récompensé de ce succès par la croix de Commandeur de l'ordre d'Isabelle la Catholique. Il était aussi officier de l'Instruction publique.

G. L.

QUESTIONS PROPOSEES

428.—D'un point fixe P du plan d'une lemniscate de Bernoulli on mène une sécante quelconque qui rencontre la lemniscate en quatre points ABCD. Le lieu du centre des moyennes distances des quatre points A,B,C,D, lorsque la sécante pivote autour du point P, est un cercle qui reste invariable pour toutes les lemniscates ayant même centre et mêmes directions d'axes. *(E. N. Barisien.)*

429. — On considère dans le plan d'un cercle un point A et une corde BB′ perpendiculaire au diamètre passant par A, ainsi que les droites BH et B′H perpendiculaires à AB et AB′. D'un point quelconque K situé sur le cercle, on mène une droite perpendiculaire à AK qui rencontre BH en P, B′H en Q, BB′ en N et le cercle en un second point M qui est le conjugué harmonique de N par rapport à P et Q.

(E. N. Barisien.)

430. — On considère une développée de parabole et la perpendiculaire à l'axe menée par le sommet de la développée. D'un point fixe de cette perpendiculaire, on mène des sécantes qui rencontrent la développée en trois points. Montrer que le lieu du centre des moyennes distance de ce point d'intersection est une autre développée de parabole.

(E. N. Barisien.)

431. — Si par le point de rebroussement d'une cardioïde on mène trois droites inclinées l'une sur l'autre de 60°, ces droites rencontrent chacune la cardioïde en deux points autres que le point de rebroussement. Les tangentes à la cardioïde en ces deux points sont rectangulaires et leur point d'intersection se trouve sur un cercle fixe.

(E. N. Barisien.)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 17722-8-92.

SUR LA CONSTRUCTION DES TANGENTES
AUX CUBIQUES A POINT DOUBLE

Par M. **S. Mangeot,** docteur ès sciences, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Troyes.

Considérons une cubique plane indécomposable, et prenons dans son plan trois droites A, B, C qui soient parallèles à ses directions asymptotiques, supposées connues, et dont l'une, au moins, ne soit pas une asymptote même. Si l'on rapporte ces lignes à deux axes de coordonnées, et si $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ sont les équations des droites A, B, C, l'équation de la cubique pourra se mettre sous la forme

$$\alpha\beta\gamma + U = 0,$$

U étant une fonction du deuxième degré. Cette fonction, égalée à zéro, définit une conique (U), qui passe par les six points de rencontre de la cubique avec les droites A, B, C.

La construction de la tangente MT, en un point quelconque M de la cubique, peut être ramenée à celle de la polaire de ce même point, par rapport à la conique (U). En effet, si x', y' désignent les coordonnées de M, et α', β', γ' les valeurs que prennent α, β, γ pour $x = x'$, $y = y'$, l'équation de MT peut s'écrire

$$\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'} + \frac{\gamma}{\gamma'} - 1 + \frac{1}{\alpha'\beta'\gamma'}\left(x\frac{dU}{dx'} + y\frac{dU}{dy'} + \frac{dU}{dt'}\right) = 0,$$

avec $t' = 1$. On voit que cette droite passe par l'intersection de la polaire D du point M, par rapport à la conique (U), avec la droite G qui correspond à l'équation

$$\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'} + \frac{\gamma}{\gamma'} = 1.$$

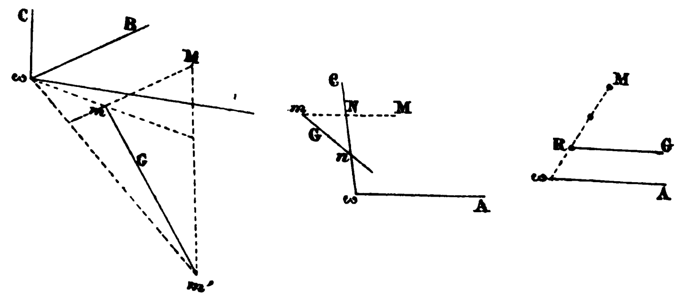
Or, cette droite G peut être définie de la manière suivante. Prenons la polaire de M par rapport à deux des trois droites A, B, C, et déterminons son point de rencontre m avec la parallèle menée, par M, à la troisième de ces droites : les trois points tels que m appartiennent à une même droite, laquelle est la droite G. Cette manière de déterminer G est en défaut

lorsque les trois droites A, B, C sont parallèles, mais l'on voit facilement le moyen de l'obtenir.

Ainsi les deux droites D et G donnent, par leur intersection, un point de la tangente MT.

Supposons maintenant que la cubique ait un point double, non isolé. Soient ω ce point, et ωt, $\omega t'$ les deux tangentes de la courbe en ce point : elles sont distinctes ou confondues, et nous admettons qu'elles soient connues géométriquement. Prenons, pour les droites A, B, C, les parallèles menées par ω aux trois directions asymptotiques. Alors la conique (U) sera formée des deux tangentes ωt, $\omega t'$, et l'on saura construire immédiatement la droite D.

Les *fig.* 1, 2, 3 indiquent, dans ce cas, la construction de la



droite G, quand on suppose réelles les droites A, B, C; elles correspondent respectivement aux hypothèses suivantes :

1° Les trois droites A, B, C sont distinctes; 2° deux d'entre elles A, B sont confondues; 3° elles coïncident toutes les trois. Dans la *fig.* 2, MN est parallèle à A, n est le milieu de ωN, et Mm est le double de MN : G est la droite mn. Dans la *fig.* 3, ωR est le tiers de ωM, et G est parallèle à A.

Lorsque deux des trois droites A, B, C, qui passent par ω, sont imaginaires, soit, par exemple, A et B, on peut déterminer la position de la droite G au moyen de la règle suivante, qui se vérifie facilement :

On considère une ellipse, de grandeur arbitraire, ayant comme asymptotes les deux droites imaginaires conjuguées A et B, et l'on prend, dans cette ellipse, le diamètre conjugué de ωM. La droite G est alors la droite mn de la *fig.* 2, en sup-

posant que la droite A, de cette figure soit ce diamètre (*).

Quand la cubique passe par les points cycliques du plan, la règle devient celle-ci :

On mène, par ω, une perpendiculaire à ωM; par M, une parallèle à la droite réelle C; et l'on joint le point de rencontre de ces deux droites au point de C qui est à la même distance de ω et de M. La droite ainsi menée est la droite G.

Remarque. — Lorsque, dans une cubique à point double, on connaît les trois asymptotes, supposées réelles, et le point double, on peut, sans connaître les tangentes en ce point, construire un point de la tangente MT, de la manière suivante :

Menons, par le point double une droite qui, limitée à deux des asymptotes, ait son milieu en ce point même : son intersection avec la troisième asymptote sera le point μ où celle-ci coupe la cubique, et les trois points tels que μ sont, comme on sait, sur une même droite Δ. Or, dans une cubique quelconque, dont les asymptotes auraient pour équations $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, la tangente MT, en tout point $M(x'.y')$, passe par l'intersection de Δ avec la droite Δ' représentée par l'équation

$$\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'} + \frac{\gamma}{\gamma'} = 2;$$

et la construction géométrique de Δ' s'effectue simplement en observant que la polaire de M, par rapport à deux quelconques des trois asymptotes, rencontre la droite symétrique de la troisième asymptote, par rapport à M, en un point devant appartenir à Δ'.

(*) Ainsi, d'après cette règle, si a, b, c sont trois longueurs données pour lesquelles $b^2 - ac$ est positif ou nul, la construction géométrique des tangentes aux différents points de l'une ou de l'autre des courbes qui correspondent à l'équation

$$x^3 + y^3 = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

et parmi lesquelles se trouve le folium de Descartes, revient à mener, par les points de contact, les tangentes à une même ellipse : c'est celle dont le centre est à l'origine, dont le grand axe est dirigé suivant la première bissectrice des axes de coordonnées, et dans laquelle enfin les demi-longueurs d'axes sont les côtés d'un triangle rectangle quelconque ayant un angle égal à 30°.

SUR UN MODE DE DESCRIPTION
D'UNE COURBE UNICURSALE PLANE OU GAUCHE

Par **X. Antomari**, professeur au Lycée Henri IV.

I. — Soit une courbe unicursale plane définie par les deux équations

$$x = \frac{f(t)}{\varphi(t)}, \qquad y = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)};$$

$f(t), f_1(t)$ et $\varphi(t)$ désignant trois polynômes entiers par rapport à la lettre t. On peut d'ailleurs toujours supposer que le degré de chaque numérateur est inférieur à celui du dénominateur, car cela revient à transporter les axes en un point convenablement choisi sur la courbe.

II. — J'appelle n le degré du dénominateur, c'est-à-dire le degré de la courbe, et je suppose d'abord que l'équation $\varphi(t) = 0$ ait ses n racines réelles et distinctes. En décomposant alors les expressions de x et de y en fractions simples, on pourra mettre ces expressions sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{t - t_i},$$

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{b_i}{t - t^i}.$$

Si l'on pose

$$x_i = \frac{a_i}{t - t^i},$$

$$y_i = \frac{b_i}{t - t_i};$$

lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point (x_i, y^i) décrit une droite OA_i passant par l'origine ; et, en donnant à i toutes les valeurs entières, depuis 1 jusqu'à n, on obtient ainsi n rayons OA_1, OA_2 ... OA_n. Du reste, les expressions de x et de y deviennent

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i, \\ y = \sum_{i=1}^{i=n} y_i. \end{cases}$$

Imaginons que l'on donne à t une valeur quelconque $t = \theta$; et soit, pour cette valeur de t, A_i la position du point (x_i, y_i) sur le rayon correspondant OA_i. Les n points $A_1, A_2, \dots A_n$ forment un polygone P, de n côtés, dont les sommets décrivent les rayons du faisceau $(O, A_1, A_2, \dots A_n)$. Deux sommets quelconques du polygone, A_i et A_k par exemple, tracent évidemment sur les rayons correspondants deux divisions homographiques. De plus, ces deux divisions sont homologiques; puisque, pour $t = \infty$, les deux points coïncident avec l'origine O des coordonnées; il en résulte que la droite $A_i A_k$ passe par un point fixe. Ainsi les côtés et les diagonales du polygone P passent par des points fixes, et $(n-1)$ de ces points suffisent d'ailleurs pour fixer la position du polygone P. En se reportant aux équations (1) on est alors conduit au théorème suivant:

Lorsque les n *sommets d'un polygone plan* $A_1A_2 \dots A_n$ *décrivent* n *droites concourantes en un point* O*; si les côtés de ce polygone passent respectivement par des points fixes, la seconde extrémité de la résultante d'un contour polygonal dont les côtés sont égaux en grandeur, direction et sens aux rayons* $OA_1, OA_2, \dots OA_n$, *décrit une courbe unicursale d'ordre* n.

On suppose, bien entendu, que la première extrémité de la résultante soit le point O.

Quant à la proposition, elle résulte immédiatement des formules (1) et de l'application du théorème des projections au contour polygonal et à sa résultante.

On peut enfin observer que $OA_1, OA_2, \dots OA_n$ sont les directions asymptotiques de la courbe.

Le théorème précédent donne, nous semble-t-il, le mode de génération le plus simple et le plus lumineux d'une courbe unicursale d'ordre n, dont les n directions asymptotiques sont réelles et distinctes.

III. — Si l'on applique ce mode de génération à l'hyperbole, on obtient la proposition suivante bien connue:

Lorsqu'une droite mobile autour d'un point fixe C *rencontre deux droites fixes* Δ_1 *et* Δ_2, *aux deux points respectifs* A_1 *et* A_2, *le quatrième sommet du parallélogramme* OA_1MA_2, *dont deux consécutifs sont* OA_1 *et* OA_2 *décrit une hyperbole admettant* OA_1 *et* OA_2 *comme directions asymptotiques.*

IV. — Des considérations tout à fait élémentaires montrent que le point fixe est le centre de l'hyperbole, de sorte que : *inversement si, par un point mobile sur une hyperbole, on mène les parallèles aux asymptotes jusqu'aux points où ces droites rencontrent les parallèles menées aux asymptotes par un point fixe quelconque, pris sur la courbe, la droite qui joint ces deux points passe par le centre de l'hyperbole.* — Cette proposition est également très connue.

V. — Si l'on observe maintenant que le centre de l'hyperbole, c'est-à-dire le point fixe qui intervient dans la proposition du n° III, est un point par lequel passent les asymptotes, on est conduit à se demander si les points fixes qui interviennent dans la génération d'une courbe unicursale d'ordre n, ne joueraient pas un rôle analogue à celui du centre dans l'hyperbole; autrement dit, s'il ne serait pas possible de trouver, au moyen de ces points, un point de chaque asymptote, ce qui achèverait de définir le système des asymptotes.

Pour résoudre cette question, nous remarquerons d'abord que l'asymptote correspondant à une racine quelconque $t = t_1$, par exemple, de l'équation $\varphi(t) = 0$, est représentée par l'équation

$$(2) \quad a_1y - b_1x = \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{t_1 - t_2} + \ldots + \frac{a_1b_n - b_1a_n}{t_1 - t_n},$$

et, en second lieu, qu'un côté quelconque, A_iA_k par exemple, du polygone P passe par le point fixe dont les coordonnées sont

$$x = \frac{a_i - a_k}{t_k - t_i} \qquad y = \frac{b_i - b_k}{t_k - t_i}.$$

Cela posé, considérons alors les $(n - 1)$ points obtenus en donnant à i les valeurs 2, 3 ... n dans les formules

$$\xi_i = \frac{a_i - a_1}{t_1 - t_i}, \qquad \eta_i = \frac{b_i - b_1}{t_1 - t_i}.$$

On vérifie bien facilement que le point représenté par

$$\begin{cases} \xi = \xi_2 + \ldots + \xi_n, \\ \eta = \eta_2 + \ldots + \eta_n, \end{cases}$$

est sur l'asymptote représentée par l'équation (2).

D'autre part, en appelant X et Y les coordonnées du centre des moyennes distances de ce système de $(n-1)$ points, on a

$$\xi = (n-1)X,$$
$$\eta = (n-1)Y.$$

Il suit de là que *le point* (ξ, η) *s'obtient en prolongeant de* $(n-2)$ *fois sa longueur le rayon qui va, du point* O, *au centre des moyennes distances du système des* $(n-1)$ *points fixes par lesquels passent les droites qui joignent le sommet* A_1 *du polygone* P, *aux* $(n-1)$ *autres sommets. En menant alors, par le point ainsi obtenu, la parallèle à la direction asymptotique* OA_1, *on aura l'asymptote correspondante.*

La même construction est applicable, bien entendu, à toutes les asymptotes.

VI. — La remarque suivante résulte immédiatement de la proposition du n° II.

Soit $OB_1B_2\ldots B_n$ *la ligne polygonale dont les côtés sont égaux en grandeur, direction et sens aux rayons* OA_1, OA_2 ... OA_n. *Quand le polygone* $A_1A_2\ldots A_n$ *se déplace dans les conditions indiquées plus haut : le sommet* B_2 *décrit une conique, le sommet* B_3 *une cubique, etc. ..., de sorte qu'ajouter un côté à la ligne polygonale équivaut à augmenter d'une unité le degré de la courbe.*

VII. — Je suppose maintenant que l'équation $\varphi(t) = 0$, ait des racines imaginaires, et je vais montrer que l'on peut, dans ce cas, construire la courbe au moyen de droites et de coniques.

La décomposition en fractions simples permet en effet de mettre les expressions des coordonnées sous la forme

$$x = \sum \frac{a_i t + \alpha_i}{P_i} + \sum \frac{m_h}{t - t_h},$$
$$y = \sum \frac{b_i t + \beta_i}{P_i} + \sum \frac{n_h}{t - \theta};$$

P_i désignant un polynôme du second degré en t.

Je pose alors

$$\left\{\begin{aligned} x_i &= \frac{a_i t + \alpha_i}{P_i}, \\ y_i &= \frac{b_i t + \beta_i}{P_i}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \xi_h &= \frac{m_h}{t - t_h}, \\ \eta_h &= \frac{n_h}{t - t_h}; \end{aligned}\right.$$

et j'appelle A_i le point dont les coordonnées sont x_i et y_i, B_h celui dont les coordonnées sont ξ_h et η_h.

Lorsque t varie, le point A_i décrit une conique Γ_i et le point B_i une droite Δ_i, passant toutes deux par l'origine. De plus, si l'on considère deux points quelconques A_i et A_k, A et B_h, ou enfin B_h et B_g ces deux points se correspondent homographiquement; les homographies des points B étant d'ailleurs des homologies.

D'après cela: *si l'on considère un système de coniques* Γ_1, Γ_2... *et de droites* Δ_1, Δ_2... *passant par le même point* O, *et si l'on suppose chacune de ces lignes parcourue par un point mobile* (A_i *pour les coniques et* B_i *pour les droites) de telle sorte que les divisions tracées par deux quelconques de ces points sur les courbes correspondantes soient homographiques, avec la condition que les homographies définies par les couples de points* B_i *soient des homologies, la seconde extrémité de la ligne polygonale qui a pour origine le point* O *et dont les côtés sont respectivement égaux en grandeur, direction et sens aux rayons* OA_1, OA_2 ..., OB_1, OB_2... *décrit une courbe unicursale, la plus générale de son degré.*

Le degré de la courbe dépend du nombre des coniques et du nombre des droites.

VIII. — Par exemple considérons une conique Γ, une droite Δ coupant la conique en un point O et une seconde droite D ne passant pas par le point O. Supposons que Δ et D soient les bases de deux divisions homographiques et appelons A un point quelconque de Δ, B le point correspondant de D, nous aurons la propriété suivante : *Traçons* BO *et soit* B_1 *le second point de rencontre de cette droite avec* Γ, *le quatrième sommet du parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont* OA *et* OB, *décrit une cubique unicursale quand le point* A *parcourt la droite* Δ.

IX. — Soient Γ_1, Γ_2 deux coniques passant par le même point O; Δ_1, Δ_2 deux droites quelconques ne passant pas par O. Considérons ces deux droites comme les bases de deux divisions homographiques, et soient A_1 et A_2 deux points correspondants. Soit B_1 le second point de rencontre de OA_1 avec Γ_1 et soit B_2 le second point de rencontre de OA_2 avec Γ_2. *Si l'on construit le parallélogramme dont* OB_1 *et* OB_2 *sont deux côtés consécutifs, le quatrième sommet de ce parallélogramme décrit une quartique unicursale; et ainsi de suite.*

X. — Dans tout ce qui précède, on n'a fait aucune hypothèse sur la nature des racines des équations telles que $P_i = 0$, de sorte que les résultats obtenus en sont eux-mêmes indépendants. On peut donc, obtenir par ce mode de génération toutes les courbes unicursales, dont les points à l'infini sont réels et distincts, ou imaginaires et distincts.

XI. — Le cas où l'équation $\varphi(t) = 0$ admet des racines doubles se ramène immédiatement au précédent.

XII, — Enfin, lorsque l'équation $\varphi(t) = 0$ a des racines multiples d'ordre supérieur à 2, la méthode n'est plus applicable; du moins, elle exigerait l'emploi d'éléments dépourvus de simplicité.

XIII. — Les considérations précédentes s'appliquent, sans modification, aux courbes unicursales de l'espace; il n'y a qu'à ajouter une troisième équation de plus pour la troisième coordonnée.

Nous pouvons donc énoncer les deux propositions suivantes :

I. — *Lorsqu'un système de points* $A_1A_2 \ldots A_n$ *varie de telle sorte que chaque point décrive une droite passant par un point* O *et que les droites qui joignent deux quelconques de ces points passent par des points fixes, la seconde extrémité du contour polygonal qui a pour origine le point* O *et dont les côtés sont respectivement égaux en grandeur, direction et sens, aux rayons* OA_1, $OA_2 \ldots OA_n$, *décrit une courbe unicursale de degré* n.

Les droites décrites par les points $A_1 . A_2, \ldots A_n$, en sont les directions asymptotiques; les asymptotes s'obtiennent d'après la règle du n° V.

En particulier, si l'on fait tourner un plan autour d'une droite et si l'on appelle A, B, C les points de rencontre de ce plan avec les arêtes Ox, Oy, Oz d'une trièdre le sommet opposé à O, dans le parallélipipède qui a pour arêtes OA, OB, OC, décrit une cubique gauche.

II. — *Soient* Γ_1, Γ_2 ... *des coniques et* Δ, Δ_2 ... *des droites passant par le même point* O *de l'espace. Supposons chacune de ces lignes parcourue par un mobile, de telle sorte que les divisions tracées par ces mobiles sur ces courbes soient deux à deux homographiques, celles qui sont tracées sur des droites, deux à deux, homologiques. Appelons* A_1, A_2... B_1, B_2 ... *les positions de ces mobiles à un instant donné et construisons le contour polygonal qui part du point* O *et dont les côtés sont respectivement égaux en grandeur, direction et sens aux rayons* OA_1, OA_2 ... OB_1, OB_2...., *la seconde extrémité de ce contour décrit une courbe gauche unicursale.*

Le degré de la courbe dépend du nombre des coniques et des droites. S'il y a n coniques et p droites, le degré est $2n + p$; pourvu, bien entendu, 1° que les coniques n'aient pas de directions asymptotiques communes; 2° que ces directions ne soient pas celles des droites proposées.

EXTENSION AUX COURBES ALGÉBRIQUES
D'UNE PROPRIÉTÉ DU CERCLE

Par M. F. **Balitrand**, ancien élève de l'École polytechnique.

Considérons un cercle C *et un point fixe* P. *Menons, au cercle, deux tangentes parallèles, et abaissons, du point* P, *les perpendiculaires* PA_1, PA_2 *sur ces tangentes. Soit* M *le milieu de* A_1A_2 *; le lieu du point* M *est la circonférence décrite sur* PC *comme diamètre.*

Cette propriété s'étend, sans modification, aux courbes algébriques d'ordre quelconque.

Soit, en effet,

$$(1) \qquad \varphi_m(u, v) + \varphi^{m-1}(u, v) + \dots \varphi_1(u, v) + a_0 = 0,$$

l'équation tangentielle d'une courbe de degré m, $\varphi_p(u, v)$ désignant un polynôme homogène, de degré p en u et v. Soit

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$$

l'équation d'une droite. En exprimant que cette droite est tangente à la courbe (1) nous avons

$$\varphi_m\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right) + \varphi_{m-1}\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right) + \dots \varphi_1\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right) + a_0 = 0,$$

$$(2)\left\{\begin{array}{l} a_0 p^m + (a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi)p^{m-1} + \\ (a_2 \cos^2\varphi + b_2 \cos\varphi \sin\varphi + c_2 \sin^2\varphi)p^{m-2} \\ + \dots + \\ a_m \cos^m\varphi + b_m \cos^{m-1}\varphi \sin\varphi + \dots + l_m \sin^m\varphi = 0. \end{array}\right.$$

Si, dans l'équation (2), on donne à φ une valeur particulière, cette équation a pour racines les distances de P aux m droites, tangentes à la courbe (1), et parallèles à la direction $\frac{\pi}{2} + \varphi$. Par suite, on a

$$p_1 + p_2 + \dots p_m = -\frac{a_1}{a_0} \cos\varphi - \frac{b_1}{a_0} \sin\varphi.$$

Posons

$$(3) \qquad mp = p_1 + p_2 + \dots p_m = -\frac{a_1}{a_0} \cos\varphi - \frac{b_1}{a_0} \sin\varphi,$$

p et φ sont alors les coordonnées polaires du point M, centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées, de P sur les tangentes à la courbe (1), parallèles à la direction $\frac{\pi}{2} + \varphi$.

En passant aux coordonnées rectangulaires l'équation (3) devient $\qquad ma_0(x^2 + y^2) + a_1 x + b_1 y = 0.$

C'est l'équation du lieu du point M. Elle ne dépend que du terme constant et des termes du premier degré de l'équation (1); elle reste donc la même pour toutes les courbes homofocales à la courbe (1).

Théorème. — *Si l'on considère une courbe algébrique quelconque* C *et si, d'un point* P, *on abaisse des perpendiculaires* PA_1, PA_2, ..; PA_m *sur les tangentes à la courbe, parallèles à une direction* Δ *; le lieu du centre des moyennes distances des points* A_1, A_2, ... A_m *lorsque* Δ *varie est une circonférence, constante pour toutes les courbes homofocales à la courbe* C.

EXERCICE ÉCRIT

60. — On considère un cercle, un diamètre AB de ce cercle et la tangente en B. Une sécante quelconque passant par A rencontre la circonférence en C et la tangente en D. On sait que si $AB = a$, on a

$$AC.AD = a^2,$$

c'est-à-dire que le cercle et la tangente sont des transformées par rayons vecteurs réciproques, la pôle de transformation étant en A.

— On considère ensuite le point E, milieu de CD et, sur la même droite ACD, le point F tel que

$$AF.AE = a^2;$$

puis le point G milieu de EF, et le point H tel que

$$AH.AC = a^2;$$

et ainsi de suite.

Les courbes, lieux des points tel que E, G, K..., sont à branches infinies. Montrer que l'aire comprise entre la courbe et leur asymptote est finie et trouver son expression.

Toutes les courbes F, H, L... réciproques des premières sont des courbes fermées; déterminer leur aire.

— Les courbes des deux séries sont toutes unicursales.

En particulier, la courbe E a pour aire $\dfrac{5\pi a^2}{16}$;

La courbe G a pour aire $\dfrac{\pi a^2}{64}\left(21 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$,

La courbe F est une ellipse d'aire égale à $\dfrac{\pi a^2}{32\sqrt{2}}$.

(*E. N. Barisien.*)

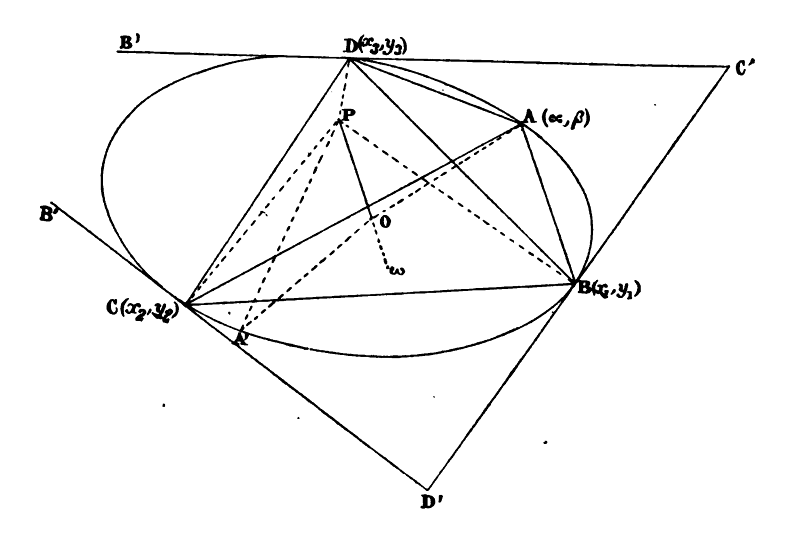
Notes sur l'exercice 59*.

Soient (α, β) les coordonnées du point A, $(x_1\ y_1)$ $(x_2\ y_2)$ $(x_3\ y_3)$, celles des trois points BCD.

Nous allons tout d'abord démontrer les propriétés dues à Steiner et à Joachimsthal.

(*) Ces notes sont de M. Barisien., qui avait proposé l'exercice 59.

Au point B la tangente et la corde AB sont également inclinées sur les axes de l'ellipse, par suite de cette propriété connue que lorsqu'un cercle coupe une ellipse, les cordes d'intersection sont *isoscéliennes*, c'est-à-dire également inclinées sur les axes. Dans ce cas, le cercle osculateur, en B, aura son quatrième point d'intersection avec l'ellipse situé en A.



En exprimant que la droite AB et la tangente en B ont des coefficients angulaires égaux et de signes contraires, on obtient

$$\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = \frac{\beta - y_1}{\alpha - x_1},$$

ou $$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 - b^2\alpha x_1 + a^2\beta y_1 = 0. \qquad (1)$$

On a aussi, en exprimant que B est sur l'ellipse

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2 = 0. \qquad (2)$$

Les points tels que B sont donc à l'intersection de l'hyperbole (1) et de l'ellipse (2). Ces deux courbes ayant leurs axes parallèles, leurs points d'intersection sont sur une circonférence. L'équation générale des coniques passant par les points communs à (1) et (2) est, en supprimant les Indices,

$$\lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + b^2x^2 - a^2y^2 - b^2\alpha x + a^2\beta y = 0:$$

Cette conique est un cercle pour $\lambda = \dfrac{a^2 + b^2}{c^2}$. Et ce cercle a pour équation $$2a^2b^2(x^2 + y^2) - b^2c^2\alpha x + a^2c^2\beta y - a^2b^2(a^2 + b^2) = 0. \qquad (3)$$

Ce cercle passe donc bien par les quatre points A, B, C, D.

Cherchons maintenant l'équation aux abscisses des points d'intersection de (3) avec l'ellipse. En éliminant y entre (3) et l'équation de l'ellipse on trouve sans difficulté

$$4x^4 - 4\alpha x^3 - 3a^2x^2 + 2a^2\alpha x + a^2\alpha^2 = 0.$$

En divisant le premier membre de cette équation par $x - \alpha$, l'abscisse du point A, il reste l'équation

(4) $$4x^3 - 3a^2x - a^2\alpha = 0.$$

Par suite

(5) $$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

On aurait trouvé, de même :

(5)' $$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Le centre de gravité du triangle BCD est donc le centre de l'ellipse.

L'équation (4) montre que, outre la relation (5), on a encore la suivante

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{3a^2}{4}.$$

Démontrons, maintenant, les propositions énoncées.

1° Les coordonnées du centre du cercle (3) sont :

$$x = \frac{c^2\alpha}{4a^2}, \qquad y = -\frac{c^2\beta}{4b^2};$$

Or $$b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 = a^2b^2.$$

En éliminant α et β entre ces trois équations, on trouve, pour le lieu du centre, l'ellipse représentée par

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{c^4}{16}.$$

2° Les coefficients angulaires de AD et BC étant égaux et de signes contraires, on a

(6) $$\frac{y_3 - \beta}{x_3 - \alpha} = -\frac{y_2 - y}{x_2 - x_1}.$$

Or $$b^2x_3^2 + a^2y_3^2 = a^2b^2.$$
$$b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 = a^2b^2$$

Donc

$$\frac{y_3 - \beta}{x_3 - \alpha} = -\frac{b^2(x_3 + \alpha)}{a^2(y_3 + \beta)}.$$

De même $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}.$$

En tenant compte de (5) et (5')

$$\frac{y_2 - y}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2x_3}{a^2y_3}.$$

Par suite, (6) devient

$$\frac{y_3 + \beta}{x_3 + \alpha} = -\frac{y_3}{x_3},$$

c'est-à-dire $$2x_3y_3 + \beta x_3 + \alpha y_3 = 0.$$

On voit donc que les trois points B, C, D sont sur l'hyperbole équilatère représentée par

(7) $$2xy + \beta x + \alpha y = 0.$$

Le point A', symétrique de A par rapport au centre O, de (E), est aussi sur cette hyperbole. Il en résulte que les normales, en B, C, D et A', sont concourantes ; car on peut identifier (7) avec l'équation de l'hyperbole d'Apollonius correspondant au point (ξ, η).

$$c^2xy - a^2\xi y + b^2\eta x = 0.$$

$$\frac{c^2}{2} = -\frac{a^2\xi}{\alpha} = \frac{b^2\eta}{\beta}.$$

3° D'où $$\xi = -\frac{c^2\alpha}{2a^2} \qquad \eta = +\frac{c^2\beta}{2b^2}$$

ce qui montre que le lieu de (ξ, η) est l'ellipse

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 = \frac{c^4}{4}.$$

4° La comparaison des coordonnées (ξ, η) de P, à celles du centre ω du cercle BCD, montre immédiatement que

$$OP = 2O\omega,$$

et que le point ω est sur la droite OP, du côté opposé à P par rapport à O.

Les propositions 3° et 4° se voient géométriquement.

En effet, la tangente en D est parallèle à BC ; par conséquent, les normales en B, C, D sont les hauteurs du triangle BCD et se coupent en un point P. — Quant à la propriété relative à la position des trois points P, O et ω, c'est précisément celle qui existe entre le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et le point de rencontre des hauteurs d'un même triangle.

5° En posant $\alpha = a \cos\varphi$, $\beta = b \sin\varphi$, on change l'équation (7) en

$$bx \sin\varphi + ay \cos\varphi + 2xy = 0.$$

Par suite, l'enveloppe de l'hyperbole d'Apollonius est représentée par

$$b^2x^2 + a^2y^2 = 4x^2y^2.$$

C'est la quartique connue sous le nom de Kreuzcurve

6° La droite BC a pour coefficient angulaire $-\dfrac{b^2x_3}{a^2y_3}$. Exprimant qu'elle passe par le milieu de BC, son équation est

$$2y - (y_1 + y_2) = -\frac{b^2x_3}{a^2y_3}[2x - (x_1 + x_2)]$$

ou en tenant compte de (5) et (5)'

(8) $$2a^2yy_3 + 2b^2xx_3 + a^2b^2 = 0.$$

En posant aussi $x_3 = a\cos\varphi_3$, $y_3 = b\sin\varphi_3$,
l'équation (8) devient $2ay\sin\varphi_3 + 2bx\cos\varphi_3 + ab = 0$.

De sorte que l'enveloppe des côtés du triangle BCD est l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{4}$$

7° : On a

$$\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \Sigma(x_1 - x_2)^2 + \Sigma(y_1 - y_2)^2 = \Sigma(x_1 + x_2)^2 + \Sigma(y_1 + y_2)^2$$
$$- 4\Sigma x_1x_2 - 4\Sigma y_1y_2$$
$$= \Sigma x_3^2 + \Sigma y_3^2 - 4\Sigma x_1x_2 - 4\Sigma y_1y_2$$
$$= (\Sigma x_1)^2 + (\Sigma y_1)^2 - 6\Sigma x_1x_2 - 6\Sigma y_1y_2.$$

Or $\Sigma x_1 = 0$, $\Sigma y_1 = 0$, $\Sigma x_1x_2 = -\dfrac{3a^2}{4}$ $\Sigma y_1y_2 = -\dfrac{3b^2}{4}$.

donc $$\Sigma\overline{BC}^2 = \frac{9}{2}(a^2 + b^2).$$

Il est intéressant de traiter la même question dans le cas de la parabole. Alors

$$\beta^2 = 2p\alpha.$$

Les coordonnées d'un point tel que B vérifiant par la relation

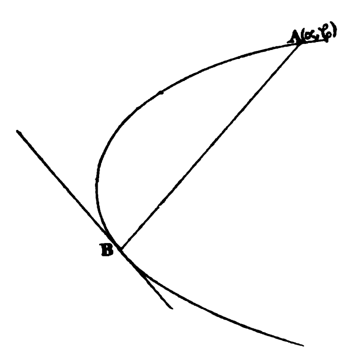
$$\frac{y - \beta}{x - \alpha} = -\frac{p}{y}$$

ou $$y^2 - \beta y + px - p\alpha = 0.$$

En faisant, dans cette équation, $x = \frac{y^2}{2p}$, on obtient

$$3y^2 - 2\beta y - \beta^2 = 0$$

ou $$(3y + \beta)(y - \beta) = 0$$



$y = \beta$ correspond au point A. De sorte qu'il n'existe dans la parabole qu'un seul point B, dont l'ordonn éest

$$y = -\frac{\beta}{3}.$$

et par suite l'abscisse

$$x = \frac{\alpha}{9}.$$

Les deux autres points C et D, qui existaient dans le cas de la conique à centre, sont rejetés à l'infini.

La droite AB a pour équation

$$2\beta Y - 6pX + \beta^2 = 0;$$

de sorte que la droite AB enveloppe la parabole dont l'équation est

$$Y^2 + 6pX = 0.$$

Remarques. — On peut encore ajouter les deux propositions suivantes:

1° *Les trois droites, perpendiculaires à* BA *en* B, *à* CA *en* C *et à* DA *en* D, *concourent en un même point.*

Les équations de ces trois droites sont

$$(9) \quad \begin{cases} b^2yx_1 + a^2xy_1 = (a^2 + b^2)x_1y_1 \\ b^2yx_2 + a^2xy^2 = (a^2 + b^2)x_2y_2 \\ b^2yx_3 + a^2xy_3 = (a^2 + b^2)x_3y_3 \end{cases}$$

Si l'on a

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

les trois droites seront concourantes. Or, ce déterminant peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & y_1 + y_2 + y_3 & x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 \end{vmatrix}.$$

Les éléments de la première ligne sont nuls. En effet, on a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

D'autre part, en ajoutant les trois équations (7), relativement à (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), on trouve aussi

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$$

La proposition est donc démontrée.

2° *Le liéu de ce point de concours est une ellipse.* — D'après (7), on a

$$y_1 = -\frac{\beta x_1}{2x_1 + \alpha}.$$

Portant cette valeur dans la première des équations (9), on trouve

$$-b^2y(2x_1 + \alpha) + a^2\beta x = (a^2 + b^2)\beta x_1.$$

La seconde des équations (9) devient, de même,

$$-b^2y(2x_2 + \alpha) + a^2\beta x = (a^2 + b^2)\beta x_2.$$

En retranchant ces deux équations et supprimant le facteur $(x_1 - x_2)$, il vient

$$y = -\frac{(a^2+b^2)\beta}{2b^2} \qquad x = -\frac{(a^2+b^2)\alpha}{2a^2}$$

Par suite, le lieu de ce point est l'ellipse correspondant à l'équation

$$4a^2x^2 + 4b^2y^2 = (a^2+b^2)^2$$

3° Si dans le triangle BCD, on calcule le côté CD et la hauteur H, on trouve sans difficulté

$$CD = \frac{\sqrt{3}}{ab}\sqrt{a^4y_1^2 + b^4x}$$

$$H \frac{3a^2b^2}{2\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}}$$

Donc, *l'aire du triangle* CBD *est constante*; elle a pour expression $\frac{3ab\sqrt{3}}{4}$.

Ce résultat était à prévoir ; car le centre de gravité du triangle BCD étant le centre de l'ellipse, on sait que ce triangle a une aire constante qui est l'aire maxima des triangles inscrits dans l'ellipse.

On peut donc en conclure la propriété suivante, inverse de celles de Steiner et Joachimsthal :

Si, par les trois sommets d'un triangle d'aire maxima inscrit a une ellipse, on mène, en chacun de ces sommets, des droites faisant avec la tangente en ces sommets des angles égaux avec les axes de l'ellipse, ces trois droites concourent en un même point situé sur l'ellipse.

QUESTION 308

Solution par M. Warocquier, à Hirson.

On considère une hyperbole H, *de centre* O. *Démontrer qu'on peut trouver un cercle* Δ, *concentrique à* H, *tel qu'il existe des lozanges inscrits à* H *et circonscrits à* Δ.

La circonférence Δ *est réelle quand l'angle des asymptotes qui contient* H *est obtus; son rayon s'obtient en élevant une perpendiculaire, au point* O, *à l'une des asymptotes de* H, *jusqu'à sa rencontre avec la courbe.*

Démontrer que si, d'un point de H, *on mène les tangentes à* Δ, *les rayons qui aboutissent aux points de contact forment un faisceau harmonique avec les perpendiculaires élevées, en* O, *aux asymptotes de* H. (G. L.)

Considérons un lozange ABCD, et cherchons les conditions pour qu'il soit inscrit à une hyperbole H. AC et BD étant deux cordes parallèles, la droite qui en joint les milieux est

leur diamètre conjugué; elle doit passer par le centre de OH. Il en est de même pour la droite qui joint les milieux de AB et CD. On voit, par suite, que le point de rencontre des diagonales coïncide avec le centre de H. De plus ces diagonales sont perpendiculaires.

Donc la condition pour qu'un quadrilatère inscrit à H soit un lozange est qu'un des côtés représenté par

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

soit vu, du centre, sous un angle droit.

Ecrivons l'équation du faisceau des droites joignant le centre de l'hyperbole à ses points d'intersection avec la droite considérée; nous avons

$$p^2(b^2x^2 - a^2y^2) - a^2b^2(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 = 0.$$

Ces deux droites étant perpendiculaires, on a

$$p = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Or, p est le rayon d'un cercle concentrique à H et inscrit au lozange.

Il y aura deux solutions si l'on a

$$b^2 > a^2;$$

ou, comme a et b sont positifs, si l'on a

$$\frac{b}{a} > 1.$$

Soit θ l'angle des asymptotes; la condition peut s'écrire

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} > 1$$

ou

$$\theta > 90^\circ.$$

Si l'angle qui contient la courbe est obtus, on aura deux solutions. On n'en aura qu'une si H est une hyperbole équilatère.

Menons, au point O, une perpendiculaire à l'une des asymptotes, nous aurons $y = \frac{a}{b}$.

Les coordonnées du point d'intersection de cette droite et de l'hyperbole sont données par

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{a^2b^4}{b^4 - a^4}, \\ y^2 = \dfrac{a^4b^2}{b^4 - a^4}; \end{cases}$$

et la distance de ce point d'intersection à l'origine est

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}} = p.$$

Soient α, β les coordonnées d'un point P de H; on a

$$(1) \qquad b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0.$$

L'équation de Δ étant

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2};$$

la polaire du point P, par rapport au cercle, est représentée par

$$\alpha x + \beta y = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2};$$

et l'équation du faisceau des droites joignant l'origine aux points de contact de tangentes menées de P à Δ, est

$$a^2b^2(x^2 + y^2) = (b^2 - a^2)(\alpha x + \beta y)^2.$$

La condition pour que ces deux droites et les perpendiculaires aux asymptotes forment un faisceau harmonique, est

$$b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0.$$

Elle est vérifiée, à cause de (1).

Nota. — Autre solution par M. Baudran.

QUESTION 328

Solution par Mme Ve F. Prime.

On considère une parabole P *dont le sommet est* S. *Soit* AA *une corde principale de* P. *Il existe une circonférence* Δ *tangente, aux points* A, A', *aux droites* SA, SA'*; elle coupe* P *en deux points* B, B', *différents des points* A, A'.

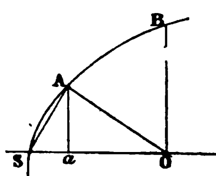
1° *Démontrer que la distance des droites* AA', BB' *est égale au paramètre* 2p.

2° *Ayant tracé une droite parallèle à l'axe et touchant* Δ *en* I, *on demande le lieu de ce point, quand* AA' *est mobile. Ce lieu est la parabole* P.

3° *Trouver l'enveloppe des circonférences telles que* Δ.

(G. L.)

Soient a le pied de la corde AA′ sur l'axe de la parabole P et O le centre de Δ, c'est-à-dire le point où la perpendiculaire à SA, au point A, rencontre l'axe de P.



Le point A appartenant à la parabole P,

$$\overline{Aa}^2 = 2p.Sa.$$

Mais, à cause du triangle rectangle SAO, on a aussi

$$\overline{Aa}^2 = aO.Sa;$$

il en résulte que $2p = aO.$

Or le même triangle rectangle donne encore

$$\overline{AO}^2 = SO.aO.$$

AO est donc l'ordonnée du point P dont l'abscisse est SO, ce qui démontre à la fois le 1° et le 2° de la question proposée.

3° Posons SO = α, l'équation de Δ est alors

$$\Delta \equiv (X - \alpha)^2 + Y^2 - 2p\alpha = 0;$$

on en tire $\Delta'_\alpha \equiv - X - p = 0,$

ce qui donne, pour enveloppe de Δ, la parabole représentée par

$$Y^2 - 2pX - p^2 = 0.$$

Elle est égale à la parabole P; son sommet est le pied de la directrice de P.

Nota. — Solutions diverses par MM. Henri, élève au lycée Louis-le-Grand; E.-N. Barisien; H. Brocard; Vazou; Svéchnicoff..

QUESTION 319

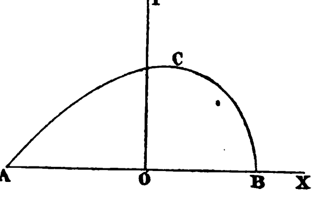
Solution par M. Blanchet, étudiant à la Faculté des sciences de Clermont-Ferrand.

Soit
$$y = \frac{1 - x^2}{(1 - 2\lambda x + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$$
l'équation d'une série de courbes. Chacune, telle que ACB *rencontre l'axe des abscisses en deux points déterminés par* $x = \pm 1$. *Démontrer que le segment* ACB *a une aire constante (c'est-à-dire, indépendante de* λ*).* (E. Catalan.)

Nous remarquerons tout d'abord que la propriété à démontrer n'existe pas pour toutes les valeurs de λ.

Nous démontrerons que l'on doit avoir $\lambda < 1$.

En effet, l'aire considérée a pour expression



$$\int_{-1}^{+1} ydx = f(\lambda),$$

et supposons que, pour $\lambda < 1$, $f(\lambda)$ soit indépendant de λ.

Prenons maintenant une valeur de λ plus grande que l'unité: soit λ', cette valeur. Nous pouvons poser $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$. λ étant plus petit que l'unité; alors

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda^3 f(\lambda),$$

quantité qui n'est pas indépendante de λ.

Pour effectuer l'intégration, nous poserons

$$1 - 2\lambda x + \lambda^2 = t^2 ;$$

$$x = \frac{1 + \lambda^2 - t^2}{2\lambda},$$

d'où
$$dx = -\frac{tdt}{\lambda},$$

$$y = \frac{4\lambda^2 - (1 + \lambda^2 - t^2)^2}{4\lambda^3 t^3}, \quad \text{et} \quad ydx = \frac{-4\lambda^2 + (1 + \lambda^2 - t^2)^2}{4\lambda^3 t^2}$$

Cherchons les limites de l'intégration par rapport à la nouvelle variable t.

Pour $x = -1$ $\quad t^2 = (1 + \lambda)^2$

$x = 1$ $\quad t^2 = (1 - \lambda)^2$,

x variant de -1 à $+1$, t^2 est toujours positif. En effet, dans cet intervalle le trinôme $1 - 2\lambda x + \lambda^2$ a ses racines imaginaires; par suite il est positif.

Dans ce cas ($\lambda > 1$) l'aire n'est donc pas indépendante de λ.

2me solution (*). — L'aire de la courbe dans la région considérée, a pour expression

(*) Cette solution est de M. Brocard.

$$I = \int y dx = \int \frac{1 - x^2}{(1 - 2\lambda x + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

ou, en posant $x = \cos\varphi$, $dx = -\sin\varphi \, d\varphi$,

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin^3\varphi}{(1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = \int_0^\pi \left[\frac{\sin^2\varphi}{1 - 2\lambda\cos d + \lambda^2}\right]^{\frac{3}{2}} d\varphi.$$

Mais, par un théorème de Liouville (*J. de Math.*, fév. 1874 et *N. C. M.* 1874, 19 et 33), on a, plus généralement,

$$\int_0^\pi F\left[\frac{\sin^2\varphi}{1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2}\right] d\varphi = \int_0^\pi F(\sin^2\varphi) d\varphi,$$

si $\lambda < 1$.

On en conclut la proposition énoncée.

Par suite, x variant de -1 à $+1$, t doit varier d'une façon continue sans changer de signe; il variera donc de $1 + \lambda$ à la valeur absolue de $1 - \lambda$. Il y a deux cas à considérer :

$\lambda < 1$ t varie de $1 + \lambda$ à $1 - \lambda$,

$\lambda > 1$ » à $\lambda - 1$.

1er Cas. — $\lambda < 1$. L'aire ABC est dans ce cas

$$\int_{1+\lambda}^{1-\lambda} \frac{-4\lambda^2 + (1 + \lambda^2 - t^2)^2}{4\lambda^3 t^2} = \int_{1+\lambda}^{1-\lambda} \frac{(1 - \lambda^2)^2}{4\lambda^3 t^2} dt - \int_{1+\lambda}^{1-\lambda} \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda^3} dt$$

$$+ \int_{1+\lambda}^{1-\lambda} \frac{t^2}{4\lambda^3} dt.$$

L'intégrale indéfinie est égale à

$$-\frac{(1 - \lambda^2)^2}{4\lambda^3 t} - \frac{(1 + \lambda^2)t}{2\lambda^3} + \frac{t^3}{12\lambda^3};$$

par suite, on a

$$\textit{aire } ACB = \int_{-1}^{+1} \frac{-4\lambda^2 + (1 + \lambda^2 - t^2)^2}{4\lambda^3\lambda^2} = \frac{1 - \lambda^2}{2\lambda^2} - \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} + \frac{3 + \lambda^2}{6\lambda^2} = \frac{4}{3}.$$

Cette aire est donc bien indépendante de λ.

2me *Cas.* — $\lambda > 1$. L'aire ABC est alors

$$\int_{\lambda+1}^{\lambda-1} \frac{-4\lambda^2 + (1+\lambda^2 - t^2)^2}{4\lambda^3 t^2} dt = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda^3} + \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+3\lambda^2}{6\lambda^3} = \frac{4}{3\lambda^3}.$$

3e Solution (par le capitaine E.-N. BARISIEN).

Posons $$1 - 2\lambda x + \lambda^2 = u^2,$$

D'où $$x = \frac{1 + \lambda^2 - u^2}{2\lambda} \qquad dx = -\frac{udu}{\lambda}.$$

Par conséquent, si U désigne l'aire ACB, on a

$$U = \int_{x=-1}^{x=+1} \frac{(1 - x^2)dx}{(1-2\lambda x+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\lambda^3} \int_{u=1-\lambda}^{u=1+\lambda} \frac{4\lambda^2-(1+\lambda^2)^2+2u^2(1+\lambda^2)-u^4}{u^4} du$$

$$U = \frac{1}{4\lambda^3} \int_{u=1-\lambda}^{u=1+\lambda} \left[2(1 + \lambda^2) - \frac{(1 - \lambda^2)^2}{u^2} - u^2\right]du$$

$$= \left[2(1 + \lambda^2)^2 u + \frac{(1 - \lambda^2)^2}{u} - \frac{u^3}{3}\right]_{u=1-\lambda}^{u=1+\lambda}.$$

Donc

$$U = \frac{1}{4\lambda^3}\left\{\begin{array}{l} 2(1+\lambda^2)[(1+\lambda)-(1-\lambda)] + (1-\lambda^2)^2\left[\frac{1}{1+\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}\right] \\ -\frac{1}{3}[(1 + \lambda)^3 - (1 - \lambda)^3] \end{array}\right\}$$

En développant et réduisant, on trouve

$$U = \frac{4}{3}. \text{ (*)}$$

L'aire est donc indépendante de λ.

4e Solution (par M. W.-J. GREENSTREET, R.A., à Cardiff).

$$\text{L'aire} = \int_{-1}^{1} \frac{1 - x^2}{(1 + \lambda^2 - 2\lambda x)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

(*) C'est le résultat indiqué dans le deuxième *Mémoire sur les fonctions* X_n, *de Legendre* (p. 93). La *remarque* faite ci-dessus (p. 237) est donc *fautive*. (E. C.)

Soit $z^2 = (1 + \lambda^2 - 2\lambda x)^{\frac{1}{2}}$

et l'expression devient

$$\int_{1+\lambda}^{1-\lambda} \frac{z^4 - 2z^2(1 + \lambda^2) + (1 - \lambda^2)^2}{4\lambda^3 z^2}\, dz$$

$$= \Big[\frac{z^3}{3} - 2z(1+\lambda^2) - \frac{1}{z}(1-\lambda^2)^2\Big]_{1+\lambda}^{1-\lambda} = \frac{4}{3}.$$

Ainsi l'aire du segment est indépendante de λ.

Nota. — Une autre solution anonyme, prenant pour base l'intégration par parties, nous a été aussi adressée. Enfin, M. Vladimiresco nous a envoyé, ce numéro étant sous presse, une solution analogue à celle de M. Blanchet.

QUESTION PROPOSÉE

359 (*). — Quatre trains se meuvent en ligne droite, avec des vitesses uniformes.

On donne les positions de ces trains à deux instants différents.

On demande de tracer deux voies rectilignes sur lesquelles deux trains puissent se mouvoir avec des vitesses uniformes, de telle sorte que pendant toute la durée du mouvement, les distances de ces deux trains à l'un quelconque des quatre premiers demeurent dans un rapport constant, et les bissectrices des angles sous lesquels on voit ces deux trains, de chacun des quatre premiers conservent des directions fixes.

Il est important d'observer que les solutions de ce problème sont toujours réelles.

(G. Tarry.)

(*) Par erreur, les questions proposées p. 216 ont été mal numérotées. Elles doivent être considérées comme portant les nos 355 à 358.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 20600-9-92.

NOTE SUR L'ANGLE DE DEUX DROITES
EN COORDONNÉES NORMALES
ET SUR QUELQUES AUTRES QUESTIONS

Par M. E. Bernès professeur honoraire.

Soient
$$lx + my + nz = 0,$$
$$l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0,$$
les équations de deux droites L, L_1. Nous appelons V l'angle (L, L_1) que L_1 fait avec L, angle défini seulement à $K\pi$ près. Les angles A, B, C du triangle de référence seront au contraire supposés définis à $2K\pi$ près, comme angles des demi-droites qui les forment, savoir $A = (AB, AC)$, $B = (BC, BA)$, $C = (CA, CB)$; leur somme est π.

Considérons les quantités imaginaires
$$\cos A + i \sin A, \quad \cos B + i \sin B, \quad \cos C + i \sin C,$$
ou plus simplement e^{iA}, e^{iB}, e^{iC}. Leur produit $e^{i\pi}$ étant égal à -1, on peut poser
$$e^{iA} = -\frac{\gamma}{\beta}, \qquad e^{iB} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad e^{iC} = -\frac{\beta}{\alpha},$$
α, β, γ étant trois quantités dont l'une reste arbitraire; les deux autres étant définies par ces égalités.

Si l'on pose
$$l\alpha + m\beta + n\gamma = \delta, \qquad l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = \delta_1,$$
$$\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = \delta', \qquad \frac{l_1}{\alpha} + \frac{m_1}{\beta} + \frac{n_1}{\gamma} = \delta_1',$$
nous allons montrer que l'angle V est donné par la formule

$$(1) \qquad i \cot g V = \frac{\delta_1\delta' + \delta\delta_1'}{\delta_1\delta' - \delta\delta_1'},$$

ou par la formule équivalente

$$(2) \qquad e^{2iV} = \frac{\delta\delta_1'}{\delta_1\delta}$$

L'équivalence est visible; on passe par exemple de (1) à

(2) en transformant par addition et soustraction la proportion

$$\frac{\cos V}{i \sin V} = \frac{\delta\delta_1 + \delta_1\delta'}{\delta\delta'_1 - \delta_1\delta'}.$$

Avant d'établir directement ces formules, je montre comment on y peut ramener la formule ordinaire

$$\operatorname{cotg} V = \frac{ll_1 + mm_1 + nn_1 - \Sigma.(mn_1 + nm_1)\cos A.}{\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}}$$

Le numérateur est égal à

$$\Sigma.l_1(l - m\cos C - n\cos B),$$

Or $$-\cos C = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta}\right),$$

et $$-\cos B = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right).$$

D'où $$l - m\cos C - n\cos B = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} + \alpha\delta'\right),$$

et, par suite,

$$\Sigma.l_1(l - \cos C - n\cos B) = \frac{1}{2}(\delta\delta'_1 + \delta_1\delta'.$$

Le dénominateur est égal à

$$\Sigma.l_1(n\sin B - m\sin C).$$

Or $$\sin B = \frac{1}{2i}\left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\alpha}{\gamma}\right)$$

et $$\sin C = \frac{1}{2i}.\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

D'où $$n\sin B - m\sin C = \frac{1}{2i}\left(\frac{\delta}{\alpha} - \alpha\delta'\right)$$

et $$\Sigma.l_1(n\sin B - m\sin C) = \frac{1}{2i}.(\delta\delta_1 - \delta_1\delta').$$

On obtient ainsi la formule (1) et, par suite, la formule (2). Passons à la démonstration.

Lemme. — *L'angle* V_a *ou* (BC, L) *d'une droite* L *avec* BC *est donné par l'égalité*

$$e^{2iV_a} = \alpha^2\frac{\delta'}{\delta}. \tag{3}$$

(De même $e^{2iV_b} = \beta^2 \frac{\delta'}{\delta}$, $e^{2iV_c} = \gamma^2 \frac{\delta'}{\delta}$.)

L'équation de la parallèle BD à la droite L est

$$\frac{z}{am - bl} = \frac{x}{bn - cm},$$

D'où
$$\frac{am - bl}{bn - cm} = \frac{\sin(B - V_a)}{\sin V_a}$$
$$= \sin B \operatorname{cotg} V_a - \cos B,$$

ou

$$\operatorname{cotg} V_a = \frac{(bn - cm)\cos B + am - bl}{b(n \sin B - m \sin C)} = \frac{-l + m \cos C + n \cos B}{n \sin B - m \sin C}$$

ou
$$\frac{\cos V_a}{i \sin V_a} = \frac{-l + m \cos C + n \cos B}{ni \sin B - mi \sin C}.$$

Par addition et soustraction

$$\frac{e^{iVa}}{e^{-iVa}} \quad \text{ou} \quad e^{2iVa} = \frac{-l + me^{-iC} + ne^{iB}}{-l + me^{iC} + ne^{-iB}} = \frac{\alpha\delta'}{\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)} = \alpha^2 \frac{\delta'}{\delta}.$$

Considérons maintenant les deux droites L, L_1. On a

$$(L, L_1) = (BC, L_1) - BC, L)$$

ou
$$V = V'_a - V_a,$$

en désignant (BC, L_1) par V'_a

Or
$$e^{2iV'a} = \alpha^2 \frac{\delta'_1}{\delta_1}, \qquad e^{2iVa} = \alpha^2 \frac{\delta'}{\delta}.$$

D'où
$$e^{2iV} = \frac{\delta \delta'_1}{\delta_1 \delta'}.$$

Énoncé de la formule (2). Lorsque les droites L, L_1 sont réelles, la formule (2) équivaut à cet énoncé : *L'angle* V *que* L_1 *fait avec* L *est égal, à* $K\pi$ *près, à l'argument de la quantité imaginaire* $\frac{\delta}{\delta_1}$ ou $\frac{l - me^{iC} - ne^{-iB}}{l_1 - m_1e^{iC} - n_1e^{-iB}}$.

Car si φ désigne cet argument, comme l, m, n, l_1, m_1, n_1, étant supposés réels, $\frac{\delta'}{\delta'_1}$ est imaginaire conjuguée de $\frac{\delta}{\delta'}$, son argument est $-\varphi$ et par suite l'argument de $\frac{\delta\delta'_1}{\delta_1\delta'}$ est 2φ; celui de e^{2iV} est 2V. Donc, à $2K\pi$ près, $2V = 2\varphi$, ou, à $K\pi$ près, $V = \varphi$.

Quand les droites L, L_1 sont quelconques, réelles ou imaginaires, il faut à cet énoncé substituer celui-ci : *Si* θ *est l'argument de* $\frac{\delta\delta_1'}{\delta_1\delta'}$ *et* ρ *son module, on a, à* $K\pi$ *près,* $V = \frac{\theta}{2} - \frac{i}{2}$ $\log \rho$. On le voit en égalant les logarithmes des deux quantités e^{2iV}, $\rho e^{i\theta}$.

Discussion. — On peut la faire sur l'une ou l'autre des formules (1) ou (2). Choisissons la formule (1).

1° *Conditions de parallélisme et de perpendicularité.* On voit que la condition du parallélisme est $\delta\delta_1' = \delta_1\delta'$ ou $\frac{\delta}{\delta'} = \frac{\delta_1}{\delta_1'}$; et la condition de perpendicularité $\delta\delta_1 = -\delta_1\delta'$ ou $\frac{\delta}{\delta'} = -\frac{\delta_1}{\delta_1'}$.

2° *Cas d'indétermination.* Cotg V est indéterminé dans deux cas; soit lorsque δ et δ' sont tous deux nuls ou bien δ_1 et δ_1', soit lorsque δ et δ_1 sont nuls à la fois ou bien δ' et δ_1'. Or les points *cycliques* étant donnés par les deux équations $\Sigma ax = 0$ $\Sigma ayz = 0$, qui sont celles de la droite de l'infini et du cercle ABC, on voit que les coordonnées (infinies) de ces deux points sont proportionnelles, pour l'un, à α, β, γ, pour l'autre, à $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$. De sorte que $\delta = 0$ exprime que la droite L passe par le premier et $\delta' = 0$ qu'elle passe par le second. En conséquence, l'indétermination de cotg V se produit, soit lorsque, l'une des droites étant quelconque, l'autre passe à la fois par les deux points cycliques, c'est-à-dire se confond avec la droite de l'infini, soit lorsque chacune des droites passe par le même point cyclique. Ainsi : *l'angle de la droite de l'infini avec une droite quelconque est indéterminé, et aussi l'angle de deux droites isotropes de même espèce, ou l'angle d'une isotrope avec elle-même.*

3° *Cas d'invariabilité.* Lorsque le produit $\delta_1\delta'$ est nul, i cotg V a une valeur invariable égale à -1 et par suite cotg V une valeur égale à i; lorsque le produit $\delta\delta_1'$ est nul, cotg V a une valeur invariale, égale à $-i$. Donc *l'angle* (L, L_1) *qu'une droite isotrope* L_1 *fait avec une droite quelconque* L_1 *non isotrope de la même espèce, a une cotangente invariable, égale à* i, *ou* $-$ i, *selon que* L_1 *est isotrope de première ou de seconde espèce.*

Quel est l'angle V ainsi défini? on a $e^{2Vi} = \frac{\cot g V + i}{\cot g V - i}$. Si l'on appelle φ l'argument et ρ le module du second membre $e^{2Vi} = \rho e^{i\varphi}$, d'où en égalent les logarithmes des deux membres $V = \frac{\varphi}{2} - \frac{i}{2}\log \rho$. Or lorsque cotg $V = i$, ρ est infini et φ quelconque; donc alors dans l'expression imaginaire qui donne V, le coefficient de i est $-\infty$, et le terme réel indéterminé. Lorsque cotg $V = -i$, ρ est nul et φ encore quelconque; et par conséquent V est formé d'un terme réel indéterminé, et d'un terme imaginaire dont le coefficient est $+\infty$.

POINT A L'INFINI D'UNE DROITE L_1 QUI FAIT AVEC UNE DROITE DONNÉE L UN ANGLE DONNÉ V

La formule
$$e^{2iV} = \frac{\delta\delta_1'}{\delta_1\delta'}$$
donne
$$\frac{\delta_1}{\delta_1'} = \frac{\delta}{\delta' e^{2iV}}.$$
D'où
$$l_1\left(\alpha\delta' e^{2iV} - \frac{\delta}{\alpha}\right) + m_1\left(\beta\delta' e^{2iV} - \frac{\delta}{\beta}\right) + n_1\left(\gamma\delta' e^{2iV} - \frac{\delta}{\gamma}\right) = 0.$$
La droite L_1 passe donc par le point dont les cordonnées sont proportionnelles à :
$$\alpha\delta' e^{2iV} - \frac{\delta}{\alpha}, \qquad \beta\delta' e^{2iV} - \frac{\delta}{\beta}, \qquad \gamma\delta' e^{2iV} - \frac{\delta}{\gamma}.$$
Toute droite parallèle à L_1 passe par le même point; c'est donc le point à l'infini de chacune.

Corollaire. — De là, l'équation d'une droite passant par un point donné (x_1, y_1, z_1) et faisant l'angle V avec une droite donnée L. L'équation est
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha\delta' e^{2iV} - \frac{\delta}{\alpha} & \beta\delta' e^{2iV} - \frac{\delta}{\beta} & \gamma\delta' e^{2iV} - \frac{\delta}{\gamma} \end{vmatrix} = 0,$$
ou
$$\delta' e^{2iV} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \delta \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix}$$

Les deux déterminants qui figurent dans cette dernière, égalés à zéro, représentent les deux isotropes qui passent par (x_1, y_1, z_1).

Si V'_a, V'_b, V'_c sont les angles que l'une des deux directions de L_1 fait avec les directions BC, CA, AB, les cordonnées du point à l'infini sont proportionnelles à $\sin V'_a$, $\sin V'_b$, $\sin V'_c$.

On voit aussi que $e^{iV'_a}$, $e^{iV'_b}$, $e^{iV'_c}$ sont proportionnels à α, β, γ.

(A suivre.)

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE CONIQUE

PAR CINQ POINTS OU PAR CINQ TANGENTES

Par **M. E. Humbert**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

L'objet de la présente Note est d'indiquer, sommairement, un moyen de discuter algébriquement, d'une façon complète, le problème de la détermination d'une conique par cinq points ou par cinq tangentes.

Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_5, y_5, z_5$, les coordonnées de cinq points distincts, situés à distance finie ou infinie; si nous exprimons qu'une conique,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0,$$

passe par les cinq points, nous obtenons les cinq équations suivantes, linéaires et homogènes, par rapport aux inconnues a, b, c, d, e, f,

$$(1)\quad \begin{cases} ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1z_1 + 2ey_1z_1 + fz_1^2 = 0, \\ ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 + 2dx_2z_2 + 2ey_2z_2 + fz_2^2 = 0, \\ ax_3^2 + 2bx_3y_3 + cy_3^2 + 2dx_3z_3 + 2ey_3z_3 + fz_3^2 = 0, \\ ax_4^2 + 2bx_4y_4 + cy_4^2 + 2dx_4z_4 + 2ey_4z_4 + fz_4^2 = 0, \\ ax_5^2 + 2bx_5y_5 + cy_5^2 + 2dx_5z_5 + 2ey_5z_5 + fz_5^2 = 0. \end{cases}$$

1° Nous allons d'abord montrer que, dans ce système, tous les déterminants du troisième ordre ne sont pas nuls; c'est-à-dire que si l'on considère trois équations linéaires de ce genre,

$$(2)\quad \begin{cases} ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1z_1 + 2ey_1z_1 + fz_1^2 = 0, \\ ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 + 2dx_2z_2 + 2ey_2z_2 + fz_2^2 = 0, \\ ax_3^2 + 2bx_3y_3 + cy_3^2 + 2dx_3z_3 + 2ey_3z_3 + fz_3^2 = 0, \end{cases}$$

les déterminants du troisième ordre que l'on peut former avec les diverses colonnes des coefficients de a, b, c, d, e, f, ne sont pas tous nuls.

En effet, si nous les supposons tous nuls, nous pourrons établir entre les éléments des six colonnes, une même relation linéaire et homogène, que nous pouvons écrire sous la forme

$$(3)\quad \begin{cases} x_3^2 = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 \\ x_3y_3 = \alpha x_1y_1 + \beta x_2y_2 \\ y_3^2 = \alpha y_1^2 + \beta y_2^2 \\ x_3z_3 = \alpha x_1z_1 + \beta x_2z_2 \\ y_3z_3 = \alpha y_1z_1 + \beta y_2z_2 \\ z_3^2 = \alpha z_1^2 + \beta z_2^2. \end{cases}$$

Ceci revient à supposer, en effet, que le coefficient relatif aux éléments de la troisième ligne n'est pas nul; mais s'il était nul, les points 1 et 2 auraient leurs coordonnées proportionnelles et coïncideraient, ce qui est contraire à l'hypothèse. Réciproquement, si les relations (3) ont lieu, pour un certain système de valeurs de α et β, tous les déterminants du troisième ordre sont nuls. Donc, au point de vue algébrique, c'est la même chose de supposer nuls tous les déterminants du troisième ordre, dans les équations (2), ou de supposer que les relations (3) ont lieu pour un même système de valeurs de α et β.

Cela posé, multiplions respectivement les équations (3) par u^2, $2uv$, v^2, $2uw$, $2vw$, w^2 et ajoutons-les; nous aurons :

$$(4)\qquad P_3^2 \equiv \alpha P_1^2 + \beta P_2^2,$$

P_1, P_2, P_3, étant des fonctions linéaires et homogènes de u, v, w, $P_1 \equiv ux_1 + vy_1 + wz_1$, $P_2 \equiv ux_2 + vy_2 + wz_2$, $P_3 \equiv ux_3 + vy_3 + wz_3$;

et cela, quelles que soient les valeurs de u, v, w. Mais cette identité est impossible, car le second membre est une forme quadratique homogène à trois variables, u, v, w, qui est mise sous la forme d'une somme de deux carrés indépendants, puisque l'on n'a pas à la fois

$$y_1z_2 - z_1y_2 = 0, \quad z_1x_2 - x_1z_2 = 0, \quad x_1y_2 - y_1x_2 = 0;$$

donc cette forme n'est pas réductible à un seul carré.

2° Je dis maintenant que si, dans les équations (1), tous les déterminants du quatrième ordre sont nuls, les cinq points sont en ligne droite. Pour cela, je vais montrer que si l'on prend quatre équations de ce genre,

$$(5)\quad \begin{cases} ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1z_1 + 2ey_1z_1 + fz_1^2 = 0, \\ ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 + 2dx_2z_2 + 2ey_2z_2 + fz_2^2 = 0, \\ ax_3^2 + 2bx_3y_3 + cy_3^2 + 2dx_3z_3 + 2ey_3z_3 + fz_3^2 = 0, \\ ax_4^2 + 2bx_4y_4 + cy_4^2 + 2dx_4z_4 + 2ey_4z_4 + fz_4^2 = 0, \end{cases}$$

y supposer tous les déterminants du quatrième ordre nuls, c'est la même chose que de supposer les quatre points en ligne droite, et réciproquement. En effet, je montrerai, comme précédemment, que supposer tous les déterminants du quatrième ordre nuls, c'est la même chose que de supposer les relations suivantes, vérifiées pour certaines valeurs de α, β, γ,

$$(6)\quad \begin{cases} x_4^2 = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 \\ x_4y_4 = \alpha x_1y_1 + \beta x_2y_2 + \gamma x_3y_3 \\ y_4^2 = \alpha y_1^2 + \beta y_2^2 + \gamma y_3^2 \\ x_4z_4 = \alpha x_1z_1 + \beta x_2z_2 + \gamma x_3z_3 \\ y_4z_4 = \alpha y_1z_1 + \beta y_2z_2 + \gamma y_3z_3 \\ z_4^2 = \alpha z_1^2 + \beta z_2^2 + \gamma z_3^2. \end{cases}$$

Alors, en multipliant par u^2, $2uv$, v^2, $2uw$, $2vw$, w^2, nous sommes ramené à l'identité

$$(7)\qquad P_4^2 \equiv \alpha P_1^2 + \beta P_2^2 + \gamma P_3^2.$$

Pour que cette identité soit possible, il faut d'abord que les trois fonctions linéaires P_1, P_2, P_3 ne soient pas indépendantes, c'est-à-dire que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

soit nul, ce qui exprime que les points 1, 2, 3 sont en ligne droite. Cela étant, mettons P_3 sous la forme $aP_1 + bP_2$; les points étant donnés, nous pouvons toujours calculer a et b. Nous aurons alors à satisfaire à l'identité

$$P_4^2 \equiv (\alpha + a^2\gamma)P_1^2 + 2ab\gamma.P_1P_2 + (\beta + b^2\gamma)P_2^2.$$

Il faut donc exprimer que le second membre est un carré et que c'est le carré de P_4; c'est ainsi qu'on aura α, β, γ. Cela n'est possible que si $P_4 \equiv AP_1 + BP_2$, c'est-à-dire si le point 4

est en ligne droite avec 1 et 2; alors on peut calculer, dès le début, A et B, et on a

$$\alpha + a^2\gamma = A^2, \quad ab\gamma = AB, \quad \beta + b^2\gamma = B^2,$$

qui donnent, sans ambiguïté, pour α, β, γ, des valeurs finies et non nulles (a, b, A, B ne sont pas nuls). La propriété annoncée est donc complètement établie;

3° Si tous les déterminant du cinquième ordre sont nuls, dans les équations (1), et que ceux du quatrième ordre ne soient pas tous nuls, quatre des cinq points sont en ligne droite, et le cinquième est en dehors de la droite qui unit les quatre autres.

En effet, si les points étaient en ligne droite, tous les déterminants du quatrième ordre seraient nuls, d'après 2°; on peut donc supposer que trois des cinq points ne sont pas en ligne droite, 1, 2, 3, par exemple. Cela posé, supposons les six déterminants du cinquième ordre nuls; il y aura entre les éléments des colonnes une même relation linéaire et homogène, et le coefficient relatif à la cinquième ligne n'est pas nul, sans quoi les quatre premiers points seraient en ligne droite; on peut donc diviser par ce coefficient et la condition que les déterminants du cinquième ordre soient nuls, est remplacée par celle-ci, que les six équations suivantes soient possibles, pour un système de valeurs de α, β, γ, δ,

$$(8)\quad \begin{cases} x_5^2 = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 + \delta x_4^2, \\ x_5 y_5 = \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2 + \gamma x_3 y_3 + \delta x_4 y_4, \\ y_5^2 = \alpha y_1^2 + \beta y_2^2 + \gamma y_3^2 + \delta y_4^2, \\ x_5 z_5 = \alpha x_1 z_1 + \beta x_2 z_2 + \gamma x_3 z_3 + \delta x_4 z_4, \\ y_5 z_5 = \alpha y_1 z_1 + \beta y_2 z_2 + \gamma y_3 z_3 + \delta y_4 z_4, \\ z_5^2 = \alpha z_1^2 + \beta z_2^2 + \gamma z_3^2 + \delta z_4^2, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, que l'identité

$$(9)\qquad P_5^2 \equiv \alpha P_1^2 + \beta P_2^2 + \gamma P_3^2 + \delta P_4^2,$$

soit possible, pour certaines valeurs de α, β, γ, δ.

Or la fonction linéaire P_4 peut toujours s'exprimer à l'aide des fonctions indépendantes P_1, P_2, P_3; on a donc

$$P_4 \equiv aP_1 + bP_2 + cP_3,$$

et l'identité (9) devient

$$P_5^2 \equiv (\alpha + \delta a^2)P_1^2 + (\beta + \delta b^2)P_2^2 + (\gamma + \delta c^2)P_3^2 + 2\delta ab P_1 P_2 + 2\delta ac P_1 P_3 + 2\delta bc P_2 P_3.$$

Le second membre est une fonction quadratique homogène des trois variables indépendantes P_1, P_2, P_3; pour qu'elle soit un carré, il faut que les six mineurs de son discriminant soient nuls, ce qui donne

$$(10)\quad \begin{cases} \beta\gamma + \beta\delta c^2 + \gamma\delta b^2 = 0, & \alpha\delta bc = 0, \\ \gamma\alpha + \gamma\delta a^2 + \alpha\delta c^2 = 0, & \beta\delta ca = 0, \\ \alpha\beta + \alpha\delta b^2 + \beta\delta a^2 = 0, & \gamma\delta ab = 0. \end{cases}$$

Occupons-nous donc du système (10).

Nous remarquons d'abord que δ ne peut pas être nul, sans quoi l'on aurait

$$P_5^2 = \alpha P_1^2 + \beta P_2^2 + \gamma P_3^2,$$

identité impossible, puisque les fonctions P_1, P_2, P_3 de u, v, w sont indépendantes; en outre, deux des inconnues α, β, γ ne peuvent être nulles, car l'on aurait, par exemple,

$$P_5^2 = \alpha P_1^2 + \delta P_4^2,$$

identité impossible d'après 1°; puis deux des nombres a, b, c ne peuvent être nuls, non plus, sans quoi l'on aurait, par exemple,

$$P_4 = aP_1,$$

ce qui n'est pas, puisque les points 4 et 1 sont distincts.

D'autre part, les équations de la seconde colonne du système (10) nous montrent qu'il faut nécessairement que l'un des nombres a, b, c soit nul et aussi l'un des nombres α, β, γ; si nous supposons $a = 0$, nous aurons aussi $\alpha = 0$. Cela veut dire que la droite des points 2, 3 contient le point 4 et aussi le point 5, car nous sommes ramené à l'identité

$$P_5^2 = (\beta + \delta b^2)P_2^2 + 2\delta bcP_2P_3 + (\gamma + \delta c^2)P_3^2,$$

que nous traiterons comme celle que nous avons considérée dans le paragraphe précédent.

Il est facile maintenant d'achever la discussion des deux problèmes signalés et nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet.

SUR LES CYCLIQUES PLANES

Par M. **F. Michel**, lieutenant du Génie.

On sait que les courbes du quatrième ordre qui ont pour points doubles les points circulaires de l'infini ont été étudiées par M. Darboux dans son ouvrage « *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* » ; il leur a donné le nom de *cycliques planes*.

L'étude qui suit a pour point de départ une propriété des cycliques, démontrée par M. G. Humbert dans sa thèse de Doctorat, présentée à la Faculté des sciences de Paris. Je commencerai donc par exposer cette propriété relative aux diamètres des cycliques planes.

I. — *Équation générale des cycliques. — Diamètres.*

1. — L'équation générale des cycliques planes est :

(1) $(x^2 + y^2)^2 - 4(ax + by)(x^2 + y^2) + \psi(x, y) = 0,$

$\psi(x, y)$ étant un polynôme du deuxième degré, cette équation représente, en effet, une courbe du quatrième ordre ayant pour points doubles les points circulaires de l'infini; de plus, elle contient huit paramètres variables.

2. — Soit

(2) $$y = mx + p,$$

l'équation d'une droite.

Je cherche l'intersection de la droite (2) avec la cyclique (1) : l'équation aux abscisses des points communs est :

$$(1 + m^2)^2x^4 + [4mp - 4(a + bm)](1 + m^2)x^3 + \dots = 0.$$

Le centre des moyennes distances des quatre points d'intersection aura pour abscisse :

$$x = -\frac{mp - a - bm}{1 + m^2}.$$

Il suffira d'éliminer p, entre cette relation et l'équation (2), pour avoir le lieu de ce point, quand la droite (2) se déplace parallèlement à elle-même : on trouve

(3) $$x + my - a - bm = 0.$$

Le lieu est une droite perpendiculaire à la droite (2) : c'est le *diamètre* des cordes de direction m.

Donc :

Théorème. — *Dans toute cyclique plane les diamètres sont perpendiculaires à la direction des cordes correspondantes.*

3. — L'équation (3) s'écrit :

$$x - a = m(b - y);$$

sous cette forme on voit que cette droite passe par le point dont les coordonnées sont a, b. Donc :

Théorème. — *Tous les diamètres passent par un point fixe.*

Ce point fixe est appelé *centre* de la cyclique.

4. — Si l'on transporte l'origine des coordonnées au centre de la cyclique, l'équation générale (1) se simplifie; en effet, ne y remplaçant x par $x + a$ et y par $y + b$, elle s'écrit successivement :

$$[(x+a)^2+(y+b)^2][(x+a)^2+(y+b)^2-4a(x+a)-4b(y+b)]+\ldots=0,$$

$$[(x+a)^2+(y+b)^2][(x-a)^2+(y-b)^2-4(a^2+b^2)]+\ldots=0,$$

$$(x^2+y^2+2ax+2by+\ldots)(x^2+y^2-2ax-2by+\ldots)+\ldots=0,$$

ou $$(x^2+y^2)^2-4(ax+by)^2+\ldots=0.$$

On voit que les termes du troisième degré ont disparu ; on pourra donc écrire l'équation sous la forme :

(4) $$(x^2+y^2)^2+\varphi(x, y)=0,$$

où φ est un polynôme du deuxième degré ; ce polynôme ne contient que six paramètres variables.

II. — *Intersection d'une cyclique et d'un cercle.*

1. — Un cercle quelconque du plan, représenté par l'équation

(C) $$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0,$$

coupe une cyclique en huit points. Si l'on retranche les deux points doubles de l'infini, il reste quatre points d'intersection à distance finie, et si l'on suppose la cyclique rapportée à son centre, les quatre points d'intersection sont sur la conique :

$$(2\alpha x+2\beta y-\gamma)^2+\varphi(x, y)=0.$$

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection du cercle et de la cyclique est donc :

(5) $$(2\alpha x+2\beta y-\gamma)^2+\lambda(x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma)+\varphi(x, y)=0.$$

2. Théorème. — *Toute conique passant par les quatre points d'intersection d'une cyclique et d'un cercle, passe aussi par les quatre points d'intersection de la cyclique et d'un autre cercle dont le centre est un point symétrique du centre du premier cercle, par rapport au centre de la cyclique.*

En effet, soit le cercle

(C') $$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma' = 0,$$

dont le centre est symétrique de celui du cercle (C) par rapport à l'origine. L'équation générale des coniques passant par ses quatre points d'intersection avec la cyclique sera :

(6) $$(2\alpha x + 2\beta y + \gamma')^2 + \lambda'(x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma') + \varphi(x, y) = 0.$$

Si les deux équations (5) et (6) peuvent être identifiées, le théorème sera démontré.

Si l'on écrit les rapports d'identification, on trouve :

$$\lambda = \lambda' = -(\gamma + \gamma').$$

Par suite, il existe une conique passant par les huit points d'intersection de la cyclique avec les deux cercles (C) et (C') et son équation est :

(7) $$(2\alpha x + 2\beta y - \gamma)^2 - (\gamma + \gamma')(x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma) + \varphi(x, y) = 0.$$

3. — Si l'on suppose que le centre du cercle (C) se rapproche indéfiniment de l'origine, celui de (C') s'en rapprochera aussi. A la limite $\alpha = \beta = 0$, les deux cercles (C) et (C') seront concentriques et l'équation (7) deviendra :

(8) $$\gamma^2 - (\gamma + \gamma')(x^2 + y^2 + \gamma) + \varphi(x, y) = 0.$$

Donc :

Théorème. — *Lorsque deux cercles concentriques ont pour centre, le centre de la cyclique, leurs huit points d'intersection avec cette courbe sont sur une conique.*

III. — Coniques inscrites à une cyclique.

1. — Supposons que les deux cercles concentriques (C) (C') du paragraphe précédent tendent à devenir égaux, leur huit points d'intersection avec la cyclique se rapprochent deux à deux les uns des autres; γ et γ' tendent vers une limite commune μ, et l'équation (8) devient :

(9) $$-\mu^2 - 2\mu(x^2 + y^2) + \varphi(x, y) = 0,$$

elle représente une conique tangente à la cyclique en quatre points.

Si l'on y considère μ comme un paramètre variable, l'équation (9) est l'équation générale des coniques inscrites à la cyclique.

On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Les quatre points de contact d'une conique inscrite à la cyclique sont sur un cercle qui a pour centre le centre de la cyclique.*

Ce cercle a pour équation,

$$x^2 + y^2 + \mu = 0.$$

on le nomme *cercle de contact.*

L'équation (9) montre encore que, *par tout point du plan passent deux coniques inscrites à la cyclique.*

2. — Revenons à l'équation (7), elle peut s'écrire :

$$(\Gamma) \qquad \left(2\alpha x + 2\beta y + \frac{\gamma - \gamma'}{2}\right)^2 - (\gamma + \gamma')(x^2 + y^2) - \frac{(\gamma + \gamma')^2}{4} + \varphi(x, y) = 0.$$

Si l'on pose $\quad D = 2\alpha x + 2\beta y + \dfrac{\gamma' - \gamma}{2}$

et $\quad S = \dfrac{-(\gamma + \gamma')^2}{4} - (\gamma + \gamma')(x^2 + y^2) + \varphi(x, y),$

l'équation s'écrira :

$$D^2 + S = 0.$$

Mais $S = 0$ représente une conique inscrite à la cyclique ; donc la conique (Γ) est bitangente à une conique (S) inscrite à la cyclique, et la corde des contacts est la droite représentée par l'équation $D = 0$.

D'autre part, l'équation du cercle de contact (C_1) de la conique (S) avec la cyclique, est :

$$(C_1) \qquad x^2 + y^2 + \frac{\gamma + \gamma'}{2} = 0,$$

et l'on peut voir que les trois cercles (C), (C'), et (C_1) ont un axe radical commun, qui est précisément la droite D. Donc :

Théorème. — *Toute conique* Γ *qui coupe une cyclique en huit points, dont quatre sont sur un cercle* (C) *et quatre sur un cercle* (C'), *est bitangente à l'une des coniques* S, *inscrites à la cyclique.*

Les deux cercles (C) *et* (C′) *et le cercle de contact* (C_1) *de la conique* S *ont le même axe radical et cet axe radical est la corde des contacts des deux coniques* Γ *et* S.

3. — Remarque. Si l'on désigne par r, r', ρ les rayons des cercles (C), (C′), (C_1) et par d la distance du cercle (C) au centre de la cyclique, on a :

$$\gamma = d^2 - r^2,$$
$$\gamma' = d^2 - r'^2,$$

et, par suite,
$$\frac{\gamma + \gamma'}{2} = d^2 - \frac{r^2 + r'^2}{2}.$$

Mais
$$\frac{\gamma + \gamma'}{2} = -\alpha^2.$$

Donc
$$\rho^2 = \frac{r^2 + r'^2}{2} - d^2,$$

c'est la relation qui existe entre les rayons des trois cercles (C), (C′), (C_1).

IV. — Conique principale.

1. Si l'on cherche le lieu des centres des coniques inscrites à la cyclique, son équation sera donnée par l'élimination de μ entre les deux relations :

$$-2\mu x + \frac{1}{2}\varphi'_x = 0,$$
$$-2\mu y + \frac{1}{2}\varphi'_y = 0,$$

et l'on obtient :

(H) $$x\varphi'_y - y\varphi'_x = 0.$$

Le lieu est donc une hyperbole équilatère. On la désigne sous le nom de *conique principale*.

Cette propriété résulte, manifestement, de l'équation (H).

Théorème — *La conique principale passe au centre de la cyclique.*

Théorème. — *La conique principale est le lieu des pieds des normales abaissées du centre de la cyclique sur les coniques inscrites.*

En effet, l'équation d'une normale à ces coniques au point

(x, y) est :
$$\frac{X - x}{-2\mu x + \frac{1}{2}\varphi'_x} = \frac{Y - y}{-2\mu y + \frac{1}{2}\varphi'_y},$$
si l'on exprime qu'elle passe à l'origine, il vient, en simplifiant,
$$x\varphi'_y - y\varphi'_x = 0,$$
et le théorème est démontré.

On démontrerait de même le théorème suivant :

Théorème. — *Si, du centre d'une cyclique, on mène des normales à cette courbe, les pieds de ces normales sont sur la conique principale.*

C'est d'ailleurs une conséquence directe du théorème précédent.

2. — Explicitons la fonction $\varphi(x, y)$ et posons
$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$
La conique principale est alors représentée par l'équation
$$Bx^2 + (C - A)xy - By^2 + Ex - Dy = 0.$$
D'autre part, les directions asymptotiques des coniques inscrites sont données par l'équation :
$$(A - 2\mu)\,x^2 + 2Bxz + (C - 2\mu)y^2 = 0,$$
et les directions des axes, bissectrices des précédentes, par
$$Bx^2 + (C - A)xy - By^2 = 0.$$
Ce sont là, précisément, les directions asymptotiques de la conique principale. Donc :

Théorème. — *Les coniques inscrites à une cyclique ont leurs axes parallèles à deux directions fixes, qui sont les directions asymptotiques de la conique principale.*

3. — D'après ce qui précède, si l'on prend les axes de coordonnées parallèles aux directions des axes des coniques inscrites, on a $B = 0$. L'équation de la conique principale devient :
$$(C - A)xy + Ex - Dy = 0.$$
La condition pour qu'elle représente deux droites est
$$DE = 0.$$
Si l'on suppose $D = 0$ ou $E = 0$, l'une des droites est l'un des axes de coordonnées, axe de symétrie de la cyclique, car l'équation de celle-ci ne contient plus de terme du pre-

mier degré en x ou en y.

Les cycliques à un axe de symétrie sont appelées *spiriques*, et il résulte de ce qui précède que :

Théorème. — *Dans toute spirique, la conique principale se réduit à deux droites, dont l'une est l'axe de symétrie de la spirique.*

Si D et E sont nuls en même temps, la conique principale se réduit aux deux axes de coordonnées, et la cyclique a deux axes de symétrie. Dans ce cas le centre de la cyclique est un centre, au vrai sens du mot. Donc :

Théorème. — *Dans une cyclique à deux axes de symétrie, la conique principale se réduit à deux droites qui sont les deu axes de la cyclique.*

4. — Si l'on conserve les axes de coordonnées indiqués dans le paragraphe précédent, l'équation générale des coniques inscrites est :

$$-\mu^2 - 2\mu(x^2 + y^2) + Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Parmi ces coniques, il y a deux paraboles, correspondant aux deux valeurs de μ :

$$\mu = \frac{A}{2}, \qquad \mu = \frac{C}{2}.$$

Elles ont leurs axes rectangulaires et parallèles aux asymptotes de la conique principale ; ceci était évident *a priori* *(A suivre.)*

EXERCICE 61

D'un point M, *on mène, à une ellipse donnée* Γ, *les tangentes* MA, MB *et l'on considère la circonférence* Δ, *circonscrite au triangle* MAB.

a) *Trouver le lieu de* M : *1°* *quand* Δ *passe par le centre* O *de* Γ; *2° quand le centre de* Δ *est sur le grand axe de* Γ.

b) Δ *coupe* Γ, *abstraction faite des points* A, B, *en deux autres points* C, D; *trouver l'enveloppe de* CD, *quand* OM *reste constant.*

c) *Quel est le lieu de* M, *quand les coordonnées du point de concours des droites* AB, CD *vérifient l'équation* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Note sur l'exercice 60,

Par M. **Barisien.**

En prenant des coordonnées polaires (le pôle étant en A est égale à AB étant l'axe polaire), l'équation du cercle dont le diamètre AB est

$$r = a \cos \theta.$$

Celle de la tangente en B est

$$r = \frac{a}{\cos \theta}.$$

L'équation du lieu des points E est donc

(E) $$2r = a \cos \theta + \frac{a}{\cos \theta}$$

ou

$$r = \frac{a(\cos^2 \theta + 1)}{2 \cos \theta}.$$

Le lieu des points F a, par suite, pour équation

(F) $$r = \frac{2a \cos \theta}{\cos^2 \theta + 1}.$$

Cette équation transformée en coordonnées rectangulaires, devient

$$2x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

La courbe (F) est donc une ellipse. Les axes sont respectivement égaux à a et à $a\sqrt{2}$.

Le point G étant le milieu de EF, l'équation du lieu des points G est

$$2r = \frac{a(\cos^2 \theta + 1)}{2 \cos \theta} + \frac{2a \cos \theta}{\cos^2 \theta + 1}.$$

Aires de ces diverses courbes. Courbe E. — L'équation de la courbe (E) transformée en coordonnées rectilignes, devient

$$y^2 = \frac{2x^2(x - a)}{a - 2x}.$$

Cette courbe est une cubique circulaire ayant un point double isolé en A, tangente au cercle en B, et ayant pour asymptote le diamètre du cercle perpendiculaire à AB.

En transportant les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au centre du cercle, on a

$$y = \frac{(2x + a)}{2} \sqrt{\frac{a - 2x}{2x}}.$$

x étant compris entre o et $\frac{a}{2}$, on peut poser

$$x = \frac{a}{2} \cos^2 \varphi.$$

D'où

$$y = \frac{a}{2} (\text{tang}\, \varphi + \sin \varphi \cos \varphi).$$

Il en résulte que l'on a pour l'aire U_E, comprise entre la courbe et son asymptote,

$$\frac{dU_E}{dx} = \left[2y \right]_{x=0}^{x=\frac{a}{2}}$$

ou

$$\frac{dU_E}{d\varphi} = \left[a^2 \sin^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Donc } U_E = a\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi d\varphi\right] = a\left[2\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16}\right]$$

ou $$U_E = \frac{5\pi a^2}{16}.$$

Courbe F. — La courbe F étant une ellipse de demi-axes $\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{\sqrt{2}}$, son aire est
$$U_F = \frac{\pi a^2}{2\sqrt{2}}.$$

Courbe G. — Les équations des courbes (E) et (F) sont de la forme
$$r = F(\theta), \qquad r_1 = \frac{k}{F(\theta)}.$$

L'équation de la courbe G, qui est une sorte de courbe diamétrale des courbes E et F, est donc
$$2R = r + \frac{k}{r}.$$

Par suite
$$4R^2 d\theta = r^2 d\theta + \frac{k^2}{r^2} d\theta + 2k d\theta.$$

Donc
$$\frac{R^2 d\theta}{2} = \frac{r^2 d\theta}{8} + \frac{r_1^2 d\theta}{8} + \frac{k}{4} d\theta.$$

En intégrant
$$U_G = \frac{U_E}{4} + \frac{U_F}{4} + \frac{k\theta}{4}.$$

Or, $k = a^2$. Pour avoir l'aire totale, il faut intégrer de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$. Il vient donc
$$U_G = \frac{U_E + U_F + \pi a^2}{4},$$

c'est-à-dire
$$U_G = \frac{\pi a^2}{64}\left[21 + 4\sqrt{2}\right]. \ (^*)$$

En général, si U est l'aire de l'une des courbes, U_1 celle de sa transformée, l'aire Σ de la courbe que l'on peut appeler diamétrale de U et U_1 aura pour expression
$$\Sigma = \frac{1}{4}(U + U_1 + \pi a^2).$$

Cette courbe Σ qui a des branches infinies aura donc, pour l'expression de l'aire comprise entre la courbe et son asymptote, une quantité finie. L'asymptote de ces courbes sera la tangente en A (sauf pour la courbe E où l'asymptote est le diamètre perpendiculaire à AB).

La courbe réciproque de Σ sera une courbe Σ_1. Cette courbe Σ_1 est fermée et son aire sera intégrale. En effet, r est une fonction rationnelle de $\cos\theta$, et en posant $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \theta$, il en résultera que r et par suite x et y seront toujours des fonctions rationnelles fractionnaires de la variable auxiliaire t. Toutes les courbes Σ_1, et Σ seront donc *unicursales*.

(*) Résultats rectifiés.

On déterminera l'aire de Σ, en utilisant la décomposition de fractions rationnelles en fractions simples.

On obtiendra aussi l'aire W de la courbe diamétrale de Σ et Σ_1 par la même formule que précédemment

$$W = \frac{1}{4}(\Sigma + \Sigma_1 + \pi a^2);$$

etc...

Remarques 1° On peut remarquer d'abord que si, au lieu de la tangente en B, on considère une droite quelconque perpendiculaire au diamètre AB, cette droite sera aussi une transformée par rayons vecteurs réciproques du cercle, et les courbes diamétrales successives de ces deux premières courbes, ainsi que les courbes réciproques des courbes diamétrales, jouiront de propriétés analogues aux précédentes.

2° On peut encore observer que l'antipodaire de la courbe E, par rapport à l'origine, est une parabole. Cette propriété est d'ailleurs connue. On sait en effet que les podaires de la parabole sont des cubiques circulaires unicursales, et que, réciproquement, toutes ces courbes peuvent être considérées comme engendrées de cette façon.

Nous rappelons enfin que, pour cette courbe, comme pour toutes les cubiques circulaires unicursales, on peut très simplement construire la tangente, par application du principe des transversales réciproques.

BIBLIOGRAPHIE

Recueil de problèmes de Mathématiques (*Géométrie analytique à deux dimensions et Géométrie supérieure*), par C. A. Laisant, docteur ès sciences, ancien Élève de l'école polytechnique; Gauthier-Villars et fils, 1893.

Sous ce titre, notre ami M. Laisant, vient de publier le premier volume d'une collection dont l'intérêt est manifeste et à laquelle on peut prédire, en toute certitude, un grand et prompt succès. Sans doute, comme l'indique le titre, ce livre n'est autre chose qu'un *recueil* et, par ce fait même, il échapperait peut-être à toute analyse s'il n'était ordonné scientifiquement et suivant un plan qui en augmente singulièrement la valeur.

L'auteur a eu cette idée, dont l'utilité est incontestable, non seulement de rassembler les énoncés épars des questions posées dans les journaux mathématiques depuis leur fondation, idée déjà excellente en elle-même, mais de les *classer* suivant une méthode simple et ingénieuse. A combien d'entre nous n'est-il pas arrivé de rechercher péniblement, dans les collections de ces journaux, l'endroit où se trouvait l'énoncé ou la solution d'une question autrefois posée, d'un théorème connu, d'un problème célèbre. Ce théorème, ou ce problème, nous savons, par un vague souvenir, qu'il existe, quelque part, dans cette collection; mais pour remettre la main sur lui, quelle longue et fastidieuse perte de temps! En s'adressant au livre de M. Laisant, on retrouvera, en quelques instants, le titre du journal qui a publié l'énoncé en question, le nom de celui qui l'a proposée et tous les renseignements nécessaires pour se reporter, soit à l'énoncé même, soit aux solutions qu'il a provoquées.

Les publications qui sont visées dans l'ouvrage de M. Laisant sont : les *Nouvelles Annales*, la *Nouvelle Correspondance Mathématique*, la *Mathesis*, et le *Journal de Mathématiques spéciales*.

La Géométrie analytique à trois dimensions donnera naissance à un volume moins étendu ; il paraîtra incessamment. Puis viendront, successivement, deux volumes à l'usage des classes de Mathématiques élémentaires.

1° *Arithmétique. — Algèbre élémentaire. — Trigonométrie.*

2° *Géométrie à deux dimensions. — Géométrie à trois dimensions. — Géométrie descriptive.*

Trois autres volumes termineront l'ouvrage en correspondant aux divisions suivantes :

1° *Algèbre. — Théorie des nombres. — Probabilités. — Géométrie de situation.*

2° *Géométrie du triangle.*

3° *Calcul infinitésimal et calcul des fonctions. — Mécanique. — Astronomie.*

Ce dernier volume s'adressera plus particulièrement aux candidats à la licence ; mais les élèves de Mathématiques spéciales y trouveront plus d'une question intéressant leur enseignement. G. L.

QUESTIONS D'EXAMENS (*)

1. — *Rendre rationnel le dénominateur de la fraction*

$$f = \frac{1}{\sqrt[p]{A} + \sqrt[q]{B} + \sqrt[r]{C} + \ldots} = \frac{1}{\theta}.$$

La solution (**) de ce problème est une heureuse conséquence de la théorie des équations binômes.

Soient : $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$, $(\alpha_1 = 1)$ les racines de l'équation $x^r - 1 = o$;

$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$, $(\beta_1 = 1)$, celles de $x^p - 1 = o$;

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_r$, $(\gamma_1 = 1)$, celles de $x^r - 1 = o$; etc...

Considérons une quantité ζ formée par la loi suivante :

On prend : 1° toutes les permutations que l'on peut faire avec les radicaux proposés, rangés sur une ligne horizontale et séparés par le signe $+$; 2° on considère une combinaison des lettres α, β, γ, ... affectées, respectivement d'un indice pris, arbitrairement : pour α, entre 1 et p; pour β, entre 1 et q; etc.

Nous exceptons pourtant la combinaison $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$ qui donnerait le facteur θ.

La quantité ζ, ainsi obtenue résout le problème posé.

Pour le démontrer, il suffit de reconnaître que $\theta\zeta$ est rationnel, par rap-

---

(*) Cette note est extraite des exercices proposés dans la troisième édition du *Supplément*, qui vient de paraître.

(**) Cette solution est empruntée au cours de M. Hubert, professeur de mathématiques spéciales, au lycée de Versailles.

port à A, par exemple. Considérons l'expression

$$\beta_i \sqrt{B} + \gamma_j \sqrt[r]{C} + \ldots = M.$$

Parmi les facteurs qui constituent ζ, on rencontrera, en particulier, les suivants. $\alpha_1 \sqrt[p]{A} + M,\quad \alpha_2 \sqrt[p]{A} + M, \ldots \alpha_p \sqrt[p]{A} + M,$ car ces expressions font partie des combinaisons que nous avons imaginées pour former ζ.

Or, en effectuant le produit

$$(\alpha_1 \sqrt[p]{A} + M)(\alpha_2 \sqrt[p]{A} + M) \ldots (\alpha_p \sqrt[p]{A} + M),$$

on trouve (*) $\qquad \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p A + M^p = A + M^p.$

Que l'on prenne, maintenant, avec les radicaux

$$\sqrt[q]{B}, \quad \sqrt[r]{C}, \ldots,$$

une autre combinaison M', analogue à M, les facteurs correspondants étant groupés dela même façon, on trouvera que le produit est rationnel en A. En considérant tous les facteurs de $\zeta\theta$, on voit, facilement, qu'ils ont été, *sans exception*, envisagés par le groupement que nous avons fait. Le produit $\zeta\theta$ est donc rationnel en A, etc.

2. — *L'incommensurable* $\sqrt[p]{a}$ *ne peut pas être racine d'une équation* à coefficients commensurables, *de degré inférieur à* p.

Soit $$z = \sqrt[p]{a};$$

Si l'on avait

$$A_1 z^{p-1} + A_2 z^{p-1} z + \ldots + A_{p-1} z + A_p = 0,$$

en multipliant cette égalité, successivement par $z^0, z^1, \ldots z^{p-1}$, on formerait le tableau d'égalités suivant :

$$\begin{aligned}
&A_1 z^{p-1} + A_2 z^{p-1} + \ldots + A z^{p-1} z + A_p = 0,\\
&A_2 z^{p-1} + \ldots \qquad\qquad + A_p z + A_1 a = 0,\\
&A_3 z^{p-1} + \ldots \qquad\qquad + A_1 a z + A_2 a = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_p z^{p-1} + A_1 a z^{p-2} + \ldots + A_{p-2} a z + A_{p-1} a = 0.
\end{aligned}$$

En posant

$$z^{p-1} = X_p, \qquad z^{p-2} = X_{p-1}, \qquad \ldots z^0 = X_1,$$

Ces égalités deviennent des équations du premier degré, pouvant être résolues ; par rapport à $X_1 = z$, notamment.

On aurait ainsi la valeur de z sous la forme commensurable; ce qui implique contradiction avec l'hypothèse que nous avons faite. On a donc $A_1 = A_2 \ldots = A_p = 0.$

3. — *Si* $A + \sqrt[p]{a}$ *est racine d'une équation* $f(x) = 0$, *à coefficients commensurables; les quantités*

$$A + \alpha_1\sqrt[p]{a}, \quad A + \alpha_2\sqrt[p]{a}, \quad \ldots \quad A + \alpha_p\sqrt[p]{a},$$

dans lesquelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ *représentent les* p *racines de l'équation* $x^p - 1 = 0$ *sont autant de racines de l'équation considérée.*

Posons $$x = A + X.$$

(*) Les autres termes disparaissent; en effet

$$\Sigma\alpha_1 = 0, \qquad \Sigma\alpha_1\alpha_2 = 0, \ldots$$

et soit $$F(X) = 0,$$
la nouvelle équation.

On a, par un certain groupement des termes,

(1) $$F(X) \equiv f_1(X^p) + Xf_2(X^p) + \ldots + X^{p-1}f_p(X^p).$$

L'équation $F = 0$, est vérifiée pour $X^p = a$; on a donc

(2) $$f_1(a) + \sqrt[p]{a}f_2(a) + \ldots + \sqrt[p]{a^{p-1}}f_p(a) = 0.$$

Or, comme nous venons de l'observer, cette égalité entraîne les suivantes :

(3) $$f_1(a) = f_2(a) \ldots = f_p(a) = 0.$$

Si l'on substitue, dans (1), à la place de α, successivement,

$$\alpha_1 \sqrt[p]{a}, \quad \alpha_2 \sqrt[p]{a}, \quad \ldots \quad \alpha_p \sqrt[p]{a},$$

on retrouve l'égalité (2), avec cette différence que $\sqrt[p]{a}$ est remplacée par $\alpha_1 \sqrt[p]{a}$, etc... Mais, d'après (3), (2) est une identité ; de cette remarque résulte le théorème en question.

6. — *Démontrer que si*

$$\sqrt[q]{a + \sqrt[p]{b}}$$

est racine d'une équation $f(x) = 0$, *à coefficients commensurables,*

$$\sqrt[q]{a + \alpha_1 \sqrt[p]{b}}, \qquad \sqrt[q]{a + \alpha_2 \sqrt[p]{b}}, \ldots$$

son racines de cette équation; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *désignant, comme dans l'exercice précédent, les* p *racines de l'équation binôme, d'exposant* p.

Posons $$x^q + a = X.$$

La transformée $F(X) = 0$ est une équation à *coefficients commensurables*; puisque, ni l'équation $f = 0$, ni la formule de transformation, ne renferment d'irrationnelles. D'après l'hypothèse que nous avons faite, $\sqrt[p]{b}$ est une racine de $F = 0$; par suite, comme nous l'avons fait voir (Ex. 3),

$$\alpha_1 \sqrt[p]{b}, \quad \alpha_2 \sqrt[p]{b}, \ldots \qquad (1)$$

sont aussi racines de $F = 0$. Si l'on considère les quantités

$$\sqrt[q]{a + \alpha_1 \sqrt[p]{b}}. \quad \sqrt[q]{a + \alpha_2 \sqrt[p]{b}}, \ldots$$

chaque radical a q valeurs ; ces q valeurs appartiennent à l'équation considérée,

4. — *Si* $\sqrt[p]{\omega}$, ω *étant une quantité incommensurable, est racine d'une équation* $f = 0$, *à coefficients commensurables*

$$\alpha_1 \sqrt[p]{\omega}, \quad \alpha_2 \sqrt[p]{\omega}, \quad \ldots \quad \alpha_p \sqrt[p]{\omega},$$

sont aussi racines de cette équation: $\alpha_1, \ldots \alpha_p$, *désignant les* p *racines de l'équation* $z^p - 1 = 0$.

Soit ω' une valeur commensurable, infiniment voisine de ω.

Alors, f admet un eracine infiniment voisine de $\sqrt[p]{\omega'}$; elle admettra donc des racines infiniment voisines de

$$\alpha_1 \sqrt[p]{\omega'}; \quad \alpha_2 \sqrt[p]{\omega'}. \quad \ldots$$

En faisant tendre ω' vers ω, on reconnaît l'exactitude de la propriété énoncée.

QUESTION 321

Solution par Mme Vve F. Prime.

On prend p *nombres, dans la suite* 1, 2 ... n. *On fait la somme ds ces* p *nombres. Evaluer la somme de toutes ces sommes partielles.* (Catalan.)

Il y a autant de sommes partielles qu'on peut faire de combinaisons avec n objets, pris p à p, ou $C_{n,p}$.

Ces sommes partielles contiennent, ensemble, $p.C_{n,p}$ nombres; par suite, dans la somme totale, chacun des nombres donnés 1, 2, 3 ... n est pris $\frac{p}{n}.C_{n,p}$ fois.

Cette somme totale vaut donc :

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n).\frac{p}{n}.C_{n,p} = \frac{(n+1).p}{2}.C_{n,p}.$$

QUESTION PROPOSÉE

360. — Donner explicitement toutes les valeurs entières de n pour lesquelles

1° $2n^2 - 1$ est un carré parfait;

2° $2n^2 + 1$ est un carré parfait.

(E. Lemoine.)

ERRATUM

Page 219, ligne 2, en remontant:
Au lieu de: côtés d'un triangle,
Lisez : côté de l'angle droit d'un triangle.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23078-10-92.

NOTE SUR L'ANGLE DE DEUX DROITES
EN COORDONNÉES NORMALES
ET SUR QUELQUES AUTRES QUESTIONS

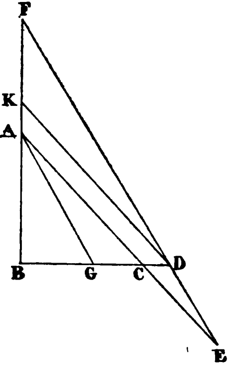
Par M. **E. Bernès**, professeur honoraire.

(Suite et fin.)

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DE L'EXPRESSION DE L'ANGLE DE DEUX DROITES

Théorème préliminaire sur le contour des coefficients. — *Si* λ, μ, ν *sont trois longueurs proportionnelles aux coefficients* l, m, n *(supposés réels) de l'équation d'une droite* L, *et qu'on les compare, d'après la règle des grandeurs complexes, en leur donnant les directions* BC, CA, AB, *ou les directions contraires, selon qu'elles sont positives ou négatives, la résultante du contour polygonal ainsi formé est parallèle à la droite* L.

Soient D, E, F les points où L rencontre BC, CA, AB, G l'intersection de BC et de la parallèle menée par A à L, K l'intersection de AB et de la parallèle à CA menée par D. Nous allons montrer que GDKA peut être pris pour contour des coefficients.



Si d, d', d'' sont les distances de A, B, C à L, les coefficients l, m, n sont proportionnels à $a.d$, $b.d'$, $c.d''$. Car tout point P (x, y, z) du plan étant le centre des distances proportionnelles du système des trois points A, B, C affectés de coefficients égaux à ax, by, cz, on a pour la distance Δ de P à L, $\Delta.\Sigma ax$ ou $2s.\Delta = d.ax + d'.by + d''cz$; et comme, pour tout point de L, Δ est nul, l'équation de L est $adx + bd'y + cd''z = 0$.

D'où $$\frac{l}{ad} = \frac{m}{bd'} = \frac{n}{cd''}.$$

D'ailleurs d, d', d'' sont proportionnels à GD, BD, CD.

Donc $$\frac{l}{a.\mathrm{GD}} = \frac{m}{b.\mathrm{BD}} = \frac{n}{c.\mathrm{CD}}.$$

Or, il est visible que les trois longueurs GD, DK, KA du contour GDKA sont proportionnelles à a.GD, b.BD, c.CD. Donc GDKA est le contour des coefficients, et la résultante GA est parallèle à L.

Ce point établi, la formule (3) $l^{2iV_a} = \frac{\alpha^2 \delta'}{\delta}$ en résulte. En effet l'angle (BC, CA) que la direction positive CA de la seconde composante du contour fait avec BC, considére comme axe polaire, est égal à π + (CB, CA) ou π — (CA, CB) ou π — C. Et l'angle (BC, AB) que la direction position de la troisième composante fait avec le même axe est égal à π + (BC, BA) ou π + B. Les trois composantes, prises en grandeur et direction, sont donc égales à λ, $\mu l^{i(\Pi - C)}$ $\nu . e^{i(\Pi + B)}$ ou λ, $-\mu e^{-iC}$, $-\nu e^{iB}$; et la résultante du contour est égale à la somme géométrique $\lambda - \mu e^{-iC} - \nu e^{iB}$ ou $\frac{\lambda}{l}(l - me^{-iC} - ne^{iB})$ ou $\frac{\lambda}{l}\alpha\delta'$. Par conséquent l'angle (BC, GA) ou V_a que la résultante fait avec BC est, à Kπ près, égal à l'argument de $\frac{\lambda}{l}\alpha\delta'$, ou à celui de $\alpha\delta'$ (l'argument de $\frac{\lambda}{l}$ étant o ou π). Or, si φ est l'argument de $\alpha\delta'$, celui de la quantité conjuguée $\frac{\delta}{x}$ est $-\varphi$, et celui du quotient $\alpha^2\frac{\delta'}{\delta}$ est 2φ, et comme le module de ce quotient est 1, il est égal à $e^{2i\varphi}$ ou à e^{2iV_a}. De là, la forme (3) $e^{2iV_a} = \alpha^2 \frac{\delta'}{\delta}$, et, par suite, les formules (2) et (1).

APPLICATIONS DU THÉORÈME SUR LE CONTOUR DES COEFFICIENTS

1° Problème. — *Construire une droite d'après les coefficients de son équation.*

Une première construction connue consiste à déterminer les points D, E, F où la droite rencontre BC, CA, AB d'après

les proportions

$$\frac{l}{\alpha.d} = \frac{m}{b.d'} = \frac{n}{c,d''}.$$

Le théorème du contour en donne une seconde. Ayant construit le contour des coefficients en partant d'une origine arbitraire et au moyen de trois longueurs quelconques λ, μ, ν proportionnelles à l, m, n, on obtient la direction de L. On trace alors AG parallèle à L, et puisque GDKA est semblable au contour, si u désigne la longueur de la résultante de ce contour, GD est donné par $\frac{\mathrm{GD}}{\lambda} = \frac{\mathrm{GA}}{u}$, le sens de GD étant celui de λ ou le sens contraire suivant que GA et u sont ou ne sont pas de même sens. On a ainsi le point D et, par suite, la droite L.

Cas particulier. — Lorsque l, m, n sont proportionnels à a, b, c, le contour est fermé. Donc la direction de la droite est indéterminée, et, u étant nul, D est à l'infini. Et, en effet, L est alors la droite de l'infini.

QUESTION INVERSE. — *Former l'équation d'une droite tracée dans le plan.*

On construit GDKA, et l'équation de la droite est

$$\mathrm{GD}.x + \mathrm{DK}.y + \mathrm{KA}.z = 0$$

(GD, DK, KA sont pris en grandeur et signe).

L'application à des droites particulières conduit à des résultats intéressants.

2° *Démonstration géométrique de la formule*

$$\Delta = \frac{\mathrm{lx} + \mathrm{my} + \mathrm{nz}}{\pm\sqrt{\delta.\delta'}}$$

qui donne la distance d'un point à une droite.

En premier lieu $\sqrt{\delta\delta'} = \pm\, u\frac{l}{\lambda}.$

Car u étant le module de $\frac{\lambda}{l}\,\alpha\delta'$, et le module de $\alpha\delta'$ étant $\sqrt{\delta\delta'}$, puisque $\alpha\delta'$ a pour conjugué $\frac{\delta}{\alpha}$, on a $u = \pm\frac{\lambda}{l}\sqrt{\delta\delta'}$,

ou $$\sqrt{\delta\delta'} = \pm\, u\frac{l}{\lambda}.$$

D'autre part $\frac{u}{\lambda} = \frac{GA}{GD} = \frac{\lambda}{d} = \frac{2S}{ad}$,

et par suite $\sqrt{\delta\delta'} = \pm \frac{2Sl}{ad}$.

Mais on a vu que

$$2S.\Delta = adx + bd'y + cd''z = \frac{ad}{l}(lx + my + cz),$$

$$\Delta = \frac{lx + my + nz}{\pm\sqrt{\delta\delta'}}.$$

3° *Construction du cercle* $\Sigma ayz = 2S(lx + my + nz)$ *d'après les coefficiente* l, m, n *de son équation.*

On construit d'après 1° la droite $lx + my + nz = 0$. C'est l'axe radical du cercle proposé et du cercle ABC (dont le centre et le rayon sont désignés par O et R). Toute la question est de construire le centre ω.

Théorème. — *Si l'on construit le contour des coefficients* l, m, n *en prenant* $\lambda = lR$, *la distance* $O\omega$ *est égale à la résultante* u *de ce contour.*

On sait que, si M est un point quelconque du plan, M_ω, M_0 ses puissances relativement aux deux cercles ω, O, on a en grandeur et signe $M_\omega - M_0 = 2O\omega.\Delta$, Δ désignant la distance de M à l'axe radical. Donc pour tout point M du cercle ω

$$- M_0 = 2O\omega.\Delta.$$

Mais $- M_0 = 2R\,\Sigma ayz = 2R(lx + my + nz)$

Donc $\frac{O\omega}{R} = \frac{lx + my + nz}{\Delta} = \frac{2Sl}{ad}$.

Et nous avons vu qu'en valeur absolue

$$\frac{2S}{ad} = \frac{u}{\lambda},$$

d'où $\frac{O\omega}{R} = \frac{ul}{\lambda}$,

et puisqu'on a pris $\lambda = lR$,

on a $O\omega = u$.

D'ailleurs d'après l'égalité

$$\frac{O\omega}{R} = \frac{2Sl}{ad},$$

Oω a le sens de d ou le sens contraire selon que l est positif ou négatif. On obtient ainsi sans ambiguïté la position de ω sur la perpendiculaire de O à l'axe radical.

Question inverse. — *Etant donné un cercle tracé dans le plan, former son équation.*

Ayant construit l'axe radical L de ce cercle et du cercle ABC, et le contour GDKA, on a pour l'équation de l'axe radical

$$\text{GD}.x + \text{DK}.y + \text{KA}.z = 0;$$

et par suite l'équation du cercle est

$$\Sigma ayz = p.2\text{S}(\text{GD}x + \text{DK}.y + \text{KA}.z)$$

où p est à déterminer. Dans le contour construit en prenant $\lambda = p.\text{GD.R}$, la résultante $u = \text{O}\omega$, et comme ce contour est semblable à GDKA, on a, en valeur absolue,

$$\frac{p\text{GD.R}}{\text{GD}} = \frac{\text{O}\omega}{\text{GA}},$$

d'où

$$p = \frac{\text{O}\omega}{\text{R.GA}}.$$

Il faut d'ailleurs attribuer à p.GD ou l le signe d.Oω ainsi qu'il a été vu. De là, le signe à donner à p.

Règle sur le sens de Oω. — *Si* φ *désigne l'angle* (BC u) *que la résultante du contour* (lR, mR, nR) *fait avec* BC, *la direction de* Oω *est définie par* (BC, Oω) $= \varphi - \frac{\pi}{2}$.

Nous venons de dire que la direction de Oω est celle de la longueur ld ou lGP, GP étant la perpendiculaire abaissée de G sur l'axe radical L. L'angle (BC, $o\omega$) sera donc (BC, GP) ou (BC, GP) $- \pi$ selon que l sera positif ou négatif. Mais GP changeant de sens en même temps que GD, on voit que (BC, GP) est égal à (BC, GA) $- \frac{\pi}{2}$ ou (BC, GA) $+ \frac{\pi}{2}$ suivant que GD est positif ou négatif. Il suit de là que (BC, Oω) = (BC, GA) $- \frac{\pi}{2}$ quand l et GD sont de même signe et (BC, $o\omega$) = (BC, GA) $+ \frac{\pi}{2}$, quand l et GD sont de signe contraire. Or, dans le pre-

mier cas, CA et u ont le même sens et (BC, CA) $= \varphi$, dans le second, GA et u sont de sens contraire et (BC. GA) $= \varphi - \pi$.

Donc dans tous les cas (BC, Oω) $= \varphi - \frac{\pi}{2}$.

4° Application à l'expression des coordonnées du centre ω.

Les coordonnées de O sont R cos A, R cos B, R cos C, et si x, y, z sont celles de ω, $x -$ R cos A est la projection de Oω sur la direction H_aA de la hauteur. Or de (BC, H_aA) $= \frac{\pi}{2}$ et (BC, Oω) $= \varphi - \frac{\pi}{2}$, il suit ($H_aA$, O$\omega$) $= \varphi - \pi$ et par conséquent $x - R = -O\omega \cos\varphi = -u\cos\varphi$. Mais $u \cos \varphi$ étant la projection de la sésultante u sur BC et les angles que font avec BC les directions positives des trois composantes, le contour étant, comme il a été vu, 0, $\pi - C$, $\pi + B$, le théorème des projections donne $u \cos \varphi = R(l - m \cos C - n \cos B)$.

De là $x = R\,(-l + m \cos C + n \cos B + \cos A)$, et par permutation

$$y = R(l \cos C - m + n \cos A + \cos B),$$
$$z = R(l \cos B + m \cos A - n + \cos C).$$

Autre forme. — D'après une transformation indiquée ces expressions équivalent à

$$\frac{2x}{R} = 2 \cos A - \frac{\delta}{\alpha} - \alpha\delta',$$
$$\frac{2y}{R} = 2 \cos B - \frac{\delta}{\beta} - \beta\delta',$$
$$\frac{2z}{R} = 2 \cos C - \frac{\delta}{\gamma} - \gamma\delta',$$

δ et δ' désignant toujours les fonctions $\Sigma l\alpha$, $\Sigma \frac{l}{\alpha}$. Une composition directe des deux quantités complexes conjuguées $\frac{\delta}{\alpha}$, $\alpha\delta'$ donne le même résultat.

Expression du rayon ρ *du cercle* $\Sigma ayz = 2S(lx + my + nz)$.

La formule est $\frac{\rho^2}{R^2} = 1 - 2\Sigma l \cos A + \delta.\delta'$.

Soit Q le point où $o\omega$ rencontre l'axe radical L; on a

$$\rho^2 - R^2 = Q\omega^2 - OQ^2 = (Q\omega + OQ)(Q\omega - OQ)$$
$$= O\omega(O\omega - 2\,OQ = O\omega^2 - 2O\omega, OQ.$$

Or $\frac{O\omega}{R}$ est égal, comme on l'a vu, au rapport constant $\frac{lx + my + nz}{\Delta}$ et par conséquent égal à $\frac{R\Sigma l \cos A}{OQ}$; d'où $2O\omega OQ = 2R^2\Sigma l \cos A$. Et comme aussi ce rapport constant est égal à $\sqrt{\delta\delta'}$, on a $O\omega^2 = R^2\delta\delta'$. Donc $\frac{\rho^2}{\pi^2} = 1 = 2\Sigma l \cos A + \delta\delta'$.

Expression de la puissance M_ω *d'un point* (x, y, z) *relativement au même cercle.*

La formule est $M_\omega = \frac{R}{S}[2S(lx + my + nz) - \Sigma ayz]$.

On a pour tout point, ainsi qu'il a été dit, $M_\omega - M_0 = 2O\omega\Delta$, où Δ est la distance de M à l'axe radical L, et

$$\frac{O\omega}{R} = \frac{lx + my + nz}{\Delta}.$$

D'où $$M_\omega = M_0 + 2R(lx + my + nz).$$

Or $$M_0 = -\frac{R}{S}\Sigma ayz.$$

Donc $$M_\omega = \frac{R}{S}[2S(lx + my + nz) - \Sigma ayz].$$

Dans une prochaine Note, nous résoudrons la question inverse. *Former l'équation d'un cercle de centre et de rayon donnés.*

SUR LES CYCLIQUES PLANES

Par M. **F. Michel**, lieutenant du Génie.

(*Suite*, voir page 251.)

V. — Pôles principaux

1. — Lorsqu'une conique inscrite à la cyclique se réduit à deux droites, ces droites sont des tangentes doubles à la cyclique : on les appelle *bitangentes.*

Elles sont également inclinées sur les asymptotes de la conique principale, et leur point de rencontre est appelé *pôle principal* de la cyclique.

D'après cela, on voit que les pôles principaux d'une cyclique sont sur la conique principale.

2. — Cherchons ces pôles principaux.

La condition pour qu'une conique inscrite se réduise à deux droites, est :

$$(A - 2\mu)E^2 + (C - 2\mu)D^2 - (F - \mu^2)(A - 2\mu)(C - 2\mu) = 0,$$

équation du quatrième degré par rapport à μ; il y a donc quatre pôles principaux; leurs coordonnées seront données par les relations :

$$x = -\frac{D}{A - 2\mu}, \qquad y = -\frac{E}{C - 2\mu}.$$

Dans le cas des spiriques nous avons $D = 0$, ou $E = 0$, supposons $D = 0$; alors l'équation précédente se décompose en deux autres :

$$A - 2\mu = 0, \qquad \text{et} \qquad E^2 - (F - \mu^2)(C - 2\mu) = 0.$$

Cela montre qu'il y a trois pôles à distance finie; le quatrième est à l'infini, dans une direction perpendiculaire à l'axe de la spirique : la conique inscrite, correspondant à la valeur $\mu = \frac{A}{2}$, se réduit, en effet, à deux droites parallèles et perpendiculaires à l'axe de la courbe.

Pour les cycliques à deux axes, on a $D = 0$, $E = 0$. On verrait de même qu'aux valeurs de μ :

$$\mu = \frac{A}{2}, \qquad \mu = \frac{C}{2},$$

correspondent deux pôles à l'infini dans la direction des deux axes. Les deux autres valeurs de μ sont données par la relation

$$F - \mu^2 = 0.$$

Les coniques inscrites correspondantes se réduisent à deux droites passant à l'origine, centre de la courbe, donc :

Théorème. — *Dans toute cyclique à deux axes de symétrie, le centre est un pôle principal double de la courbe.*

3. — *La cyclique est anallagmatique par rapport aux pôles principaux.*

Pour le prouver, je démontrerai d'abord une propriété de tangentes aux coniques inscrites.

Soit δ une droite tangente, en un point m, à une conique inscrite Γ, et coupant la cyclique en quatre points a, b, c, d : je dis que l'on a :

$$ma.mb = mc.md.$$

En effet, traçons une autre droite quelconque δ', touchant Γ en m', et coupant la cyclique aux points a', b' c', d'. Les deux droites δ, δ' forment une conique bitangente à Γ; donc les quatre points a, a', b, b' sont sur un cercle (C); de même c, d, c', d' sont sur un cercle (C'); et la droite mm' est l'axe radical de ces deux cercles; par suite le point m ayant même puissance par rapport aux cercles (C), (C'), on a :

$$ma.mb = mc.md.$$

Observons que si l'on considère le cercle de contact C_1 de la conique Γ, les trois cercles (C), (C'), (C_1) ayant mm' pour axe radical, la valeur commune des deux produits ci-dessus est égale à la puissance du point m par rapport au cercle de contact $(C)_1$.

— Je considère, alors, la conique inscrite Γ formée par les deux bitangentes issues d'un pôle principal π; toute droite δ passant par le point π, et coupant la cyclique en quatre points a, b, c, d peut être considérée comme tangente à la conique Γ; donc :

$$\pi a.\pi b = \pi c.\pi d.$$

La valeur commune de ces deux produits sera constante et égale à la puissance du point π par rapport au cercle passant par les points de contact des deux bitangentes.

La cyclique est donc anallagmatique par rapport au pôle principal π.

4. — On peut déduire de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème. — *La conique principale passe par le centre et par les quatre pôles principaux de la cyclique : elle est déterminée par ces points.*

VI. — Cercles bitangents a une Cyclique.

1. — Tout cercle du plan coupe une cyclique en quatre points à distance finie : si ces quatre points se confondent deux à deux, le cercle est bitangent à la cyclique.

Soit donc :

(1) $$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

l'équation d'un cercle quelconque.

Si l'on pose : $P \equiv 2\alpha x + 2\beta y - \gamma$,

l'équation générale des coniques passant par l'intersection du cercle et de la cyclique :

$$(x^2 + y^2)^2 + Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

est :

(2) $$P^2 + Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F + \lambda(x^2 + y^2) - \lambda P = 0,$$

où λ est un paramètre variable.

Si cette conique se réduit à une droite double, le cercle (1) sera bitangent à la cyclique; il faut pour cela que le premier membre de l'équation (2) soit un carré parfait, c'est-à-dire que les trois dérivées partielles se réduisent à une seule. En égalant ces dérivées à zéro, on a :

$$2\alpha P + (Ax + D) + \lambda(x - \alpha) = 0,$$
$$2\beta P + (Cy + E) + \lambda(y - \beta) = 0,$$
$$-\gamma P + (Dx + Ey + F) - \lambda(\alpha x + \beta y - \gamma) = 0.$$

Joignons-y l'équation $P = 2\alpha x + 2\beta y - \gamma$.

puis exprimons que ces quatre équations se réduisent à deux. On tire des deux premières les valeurs d'x et d'y et, en les portant dans les deux dernières, on obtient deux équations en P, qui doivent être vérifiées quel que soit P. On a donc successivement :

$$x = \frac{\alpha\lambda - 2\alpha P - D}{A + \lambda}, \qquad y = \frac{\beta\lambda - 2\beta P - E}{C + \lambda}$$

et $$2\alpha\left(\frac{\alpha\lambda - 2\alpha P - D}{A + \lambda}\right) + 2\beta\left(\frac{\beta\lambda - E - 2\beta P}{C + \lambda}\right) - P - \gamma = 0$$

$$-\gamma P + (D - \lambda\alpha)\frac{\alpha\lambda - D - 2\alpha P}{A + \lambda} + (E - \lambda\beta)\frac{\beta\lambda - E - 2\beta P}{C + \lambda} + F + \lambda\gamma = 0.$$

Annulant les coefficients de P et les termes constants dans ces deux relations, j'obtiens quatre relations, dont trois seulement sont distinctes :

$$\frac{4\alpha^2}{A + \lambda} + \frac{4\beta^2}{C + \lambda} + 1 = 0,$$

$$\frac{2\alpha(D - \lambda\alpha)}{A + \lambda} + \frac{2\beta(E - \lambda\beta)}{C + \lambda} + \gamma = 0,$$

$$\frac{-(D - \lambda\alpha)^2}{A + \lambda} - \frac{(E - \lambda\beta)^2}{C + \lambda} + F + \lambda\gamma = 0,$$

relations, qui, combinées entre elles, donnent les trois suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{4\alpha^2}{A+\lambda} + \frac{4\beta^2}{C+\lambda} + 1 = 0,\\ &\frac{2D\alpha}{A+\lambda} + \frac{2E\beta}{C+\lambda} + \frac{\lambda}{2} + \gamma = 0.\\ &\frac{D^2}{A+\lambda} + \frac{E^2}{C+\lambda} + \frac{\lambda^2}{4} - F = 0.\end{aligned}\right.$$

La troisième relation, indépendante de α, β, γ, donne pour λ quatre valeurs; il y a donc quatre séries de cercles bitangents à la cyclique; si l'on développe cette relation on a

$$D^2(C+\lambda) + E^2(A+\lambda) - \left(F - \frac{\lambda^2}{4}\right)(A+\lambda)(C+\lambda) = 0.$$

Remarquons, en passant, que cette équation est identique à celle que l'on a trouvée plus haut, dans la recherche des pôles principaux de la cyclique. Cette remarque sera utile dans la suite.

2. — La première relation donne le lieu des centres des cercles de chaque série

$$(4)\qquad \frac{4\alpha^2}{A+\lambda} + \frac{4\beta^2}{C+\lambda} + 1 = 0.$$

On a ainsi quatre coniques homofocales, concentriques à la cyclique et dont les axes sont parallèles aux asymptotes de la conique principale. Donc :

Théorème. — *Le lieu des centres des cercles bitangents à une cyclique se compose de quatre coniques homofocales et de même centre que la cyclique.*

Ces quatre coniques ont été appelées *coniques focales* (Salmon). On verra, plus loin, d'où vient cette dénomination.

3. — La deuxième des relations (3) montre que tous les cercles d'une même série sont orthogonaux à un cercle fixe dont l'équation est :

$$(6)\qquad x^2 + y^2 + \frac{2D}{A+\lambda}x + \frac{2E}{C+\lambda}y + \frac{\lambda}{2} = 0.$$

En effet, le centre de ce cercle a pour coordonnées

$$-\frac{D}{A+\lambda},\qquad -\frac{E}{C+\lambda};$$

le carré de son rayon est :

$$\rho^2 = \frac{D^2}{(A+\lambda)^2} + \frac{E^2}{(C+\lambda)^2} - \frac{\lambda}{2}.$$

La puissance de son centre, par rapport au cercle (1), sera donc :

$$\frac{D^2}{(A+\lambda)^2} + \frac{E^2}{(C+\lambda)^2} - \frac{2D\alpha}{A+\lambda} - \frac{2E\beta}{C+\lambda} + \gamma$$

ou, d'après la deuxième des relations (3) :

$$\frac{D^2}{(A+\lambda)^2} + \frac{E^2}{(C+\lambda)^2} - \frac{\lambda}{2} = \rho^2;$$

ce qui démontre l'orthogonalité des deux cercles.

Remarque. — On peut d'ailleurs voir autrement que tous les cercles bitangents de la même série sont orthogonaux à un cercle fixe.

En effet, si ce cercle existe, il sera le lieu des points dont les polaires, par rapport à tous les cercles de la série, concourrent en un même point, puisqu'il est orthogonal à tous ces cercles, en d'autres termes, ce sera le *Jacobien* de la série de cercles (Salmon).

Je vais donc chercher l'enveloppe des polaires d'un point quelconque M, par rapport aux cercles de la série, voir si cette enveloppe peut se réduire à un point N, et quel sera, dans ce cas, le lieu du point M considéré.

Soient (x_1, y_1) les coordonnées du point M. Sa polaire par rapport au cercle (1) a pour équation :

$$x(x_1 - \alpha) + y(y_1 - \beta) - \alpha x_1 - \beta y_1 + \gamma = 0,$$

laquelle peut s'écrire, en tenant compte de la deuxième des relations (3),

$$x(x_1 - \alpha) + y(y_1 - \beta) - \alpha x_1 - \beta y_1 - \frac{2D\alpha}{A+\lambda} - \frac{2E\beta}{C+\lambda} - \frac{\lambda}{2} = 0,$$

ou

$$(6)\quad -\alpha\left(x + x_1 + \frac{2D}{A+\lambda}\right) - \beta\left(y + y_1 + \frac{2E}{C+\lambda}\right) + xx_1 + yy_1 - \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe de cette polaire, il faudra éliminer α et β entre l'équation (6), la relation (4), et la suivante :

$$\left(x + x_1 + \frac{2D}{A+\lambda}\right)\frac{\beta}{C+\lambda} - \left(y + y_1 + \frac{2E}{C+\lambda}\right)\frac{\alpha}{A+\lambda} = 0.$$

Cette élimination se fait très simplement, car :

$$\frac{\dfrac{\alpha}{A+\lambda}}{x+x_1+\dfrac{2D}{A+\lambda}} = \frac{\dfrac{\beta}{C+\lambda}}{y+y_1+\dfrac{2E}{C+\lambda}}$$

$$= \frac{1}{-4\alpha\left(x+x_1+\dfrac{2D}{A+y}\right)-4\beta\left(y+y_1+\dfrac{2E}{C+\lambda}\right)}$$

$$= -\frac{1}{4\left(xx_1+yy_1-\dfrac{\lambda}{2}\right)}$$

égalités d'où l'on tire :

$$\alpha=(A+\lambda)\frac{x+x_1+\dfrac{2D}{A+\lambda}}{4\left(xx_1+yy_1-\dfrac{\lambda}{2}\right)}, \qquad \beta=(C+\lambda)\frac{y+y_1+\dfrac{2E}{C+\lambda}}{4\left(xx_1+yy_1-\dfrac{\lambda}{2}\right)}.$$

Portant ces valeurs dans la relation (4), il vient, en réduisant et simplifiant,

$$\frac{A+\lambda}{4}\left(x+x_1+\frac{2D}{A+\lambda}\right)^2+\frac{C+\lambda}{4}\left(y+y_1+\frac{2E}{C+\lambda}\right)^2$$
$$+\left(xx_1+yy_1-\frac{\lambda}{2}\right)^2=0.$$

Telle est l'équation de l'enveloppe cherchée : le premier membre est une somme de trois carrés. Pour qu'elle représente un point N, il faut qu'elle se réduise à une somme de deux carrés, c'est-à-dire qu'il existe une relation entre les trois fonctions linéaires suivantes :

$$x+x_1+\frac{2D}{A+\lambda}=0,$$

$$y+y_1+\frac{2E}{C+\lambda}=0,$$

$$xx_1+yy_1-\frac{\lambda}{2}=0.$$

Dans ce cas, les coordonnées du point $M(x_1, y_1)$ vérifieront l'équation

$$x_1^2+y_1^2+\frac{2D}{A+\lambda}x_1+\frac{2E}{C+\lambda}y_1+\frac{\lambda}{2}=0,$$

obtenue en éliminant x et y entre les trois relations précédentes.

On retrouve ainsi, comme on le voit, le cercle (5), indiqué plus haut.

4. — Nous avons vu, dans ce qui précède, que les coordonnées d'un pôle principal sont données par les formules

$$x = -\frac{D}{A - 2\mu} \qquad y = -\frac{E}{C - 2\mu}.$$

Or, le centre du cercle (5) a pour coordonnées

$$x = -\frac{D}{A+\lambda}, \qquad y = -\frac{E}{C+\lambda};$$

formules analogues aux précédentes, si l'on remplace λ par -2μ; mais, on a remarqué, plus haut, que les équations du quatrième degré donnant les valeurs de λ et -2μ étaient identiques.

Il en résulte que le centre du cercle (5) considéré, coïncide avec l'un des pôles principaux de la cyclique.

Donc :

On peut considérer une cyclique comme l'enveloppe d'un cercle mobile dont le centre décrit une conique fixe (4), *et qui reste orthogonal à un cercle fixe* (5) *ayant pour centre l'un des pôles principaux de la cyclique.*

On retrouve ainsi le mode de génération des cycliques, indiqué par Casey.

Nous appellerons le cercle fixe (5) *cercle directeur.*

L'équation qui donne les valeurs de λ, étant du quatrième degré, on voit qu'il y a, pour une cyclique, quatre modes de génération semblables.

Les quatre cercles directeurs ont pour centres les quatre pôles principaux de la courbe.

5. — Cherchons l'équation de la corde des contacts d'un des cercles (1) avec la cyclique; pour cela revenons à l'équation :

$$(2\alpha x + 2\beta y - \gamma)^2 + Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$
$$+ \lambda\,(x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma) = 0,$$

et décomposons le premier membre en une somme de carrés, par la méthode ordinaire. D'après les relations (3), il doit se

réduire à un seul carré X^2, et $X = 0$ sera l'équation de la corde des contacts. Effectuant le calcul on trouve :

$$X = (A + \lambda + 4\alpha^2)x + 4\alpha\beta y + D - \lambda\alpha - 2\alpha\gamma = 0.$$

Si l'on remplace, dans cette équation, x et y par les coordonnées du centre du cercle (5) on a :

$$-\frac{4D\alpha}{A+\lambda} - \frac{4E\beta}{C+\lambda} - \lambda - 2\gamma,$$

expression nulle d'après la deuxième des relations (3). Donc :

Les cordes des contacts de tous les cercles bitangents de la même série passent par le centre du cercle orthogonal (5), *c'est-à-dire par un des pôles principaux de la cyclique.*

6. — Considérons alors un des points où le cercle fixe (5) rencontre la cyclique, et le cercle (C) de la série correspondante, tangent à la courbe en ce point. Remarquons que le cercle (C) et la cyclique ont même tangente en ce point, et que cette tangente passe au centre du cercle (5), puisqu'il est orthogonal au cercle (C). Donc cette tangente est la corde des contacts du cercle (C) et de la cyclique.

Le cercle (C) et la courbe ont donc quatre points confondus au point de contact. Ce point a été appelé *point cyclique* de la courbe (Salmon). Donc :

Les points cycliques de la courbe sont les points d'intersection, avec la courbe, des quatre cercles directeurs.

Ou bien :

Les points cycliques sont les points de contact des tangentes menées à la cyclique par ses quatre pôles principaux.

Il y a donc, sur la courbe, seize points cycliques. On démontre qu'à chacun de ces points correspond un point de rebroussement de la développée de la courbe, la normale au point cyclique étant la tangente au point de rebroussement (Salmon).

7. — De ce qui précède, on peut déduire facilement l'équation quadratique des bitangentes à la cyclique. Toute bitangente, passant par un pôle principal, peut être considérée comme un cercle bitangent dont le centre est à l'infini dans

une direction perpendiculaire à cette bitangente; mais ce centre est sur l'une des coniques focales, donc :

Théorème. — *Les bitangentes à la cyclique sont perpendiculaires aux directions asymptotiques des coniques focales de cette courbe.*

Cette propriété permet d'écrire immédiatement l'équation quadratique des bitangentes issues d'un pôle principal; elle est :

$$(A + \lambda)\left(x - \frac{D}{A + \lambda}\right)^2 + (C + \lambda)\left(\mu - \frac{E}{c + \lambda}\right)^2 = o.$$

A chacune des quatre valeurs de λ correspondra un couple de bitangentes.

VII. — Foyers des Cycliques.

1. — La recherche des cercles bitangents à la cyclique, nous amène directement à celle du foyer de cette courbe.

En effet, considérons les quatre points d'intersection d'un des quatre cercles directeurs, avec la conique focale correspondante. Ces quatre points peuvent être considérés comme des cercles de rayon nul, bitangents à la cyclique : ce sont donc des *foyers* de la courbe.

Une cyclique a donc seize foyers et l'on retrouve ainsi le théorème du Dr Hart.

Théorème. — *Les seize foyers d'une cyclique sont situés sur quatre cercles.*

On voit aussi maintenant d'où vient le nom de *coniques focales* donné aux quatre coniques, lieu des centres des cercles bitangents à la cyclique.

2. — Prenons le cas d'une spirique, et supposons, par exemple, $D = o$. L'équation du quatrième degré en λ se décompose en deux :

$$A + \lambda = o, \qquad 4E^2 + (\lambda^2 - 4F)(C + \lambda) = o.$$

L'un des cercles directeurs, correspondant à la valeur $\lambda = - A$ se réduit à l'axe de la spirique, et l'on voit que :

Toute spirique a quatre foyers situés sur son axe.

Dans le cas d'une cyclique à deux axes, $D = 0$ et $E = 0$, y a quatre foyers en ligne droite sur chacun des deux axes, correspondant aux valeurs :

$$\lambda = -A \qquad \lambda = -C.$$

Quant aux huit autres foyers, ils sont situés sur deux cercles concentriques à la cyclique, correspondant aux valeurs de A donnée par l'équation :

$$\lambda^2 - 4F = 0.$$

(A suivre.)

EXERCICE 62

D'un point M, *on mène, à une ellipse donnée* Γ, *quatre normales telles que deux d'entre elles,* MA, MB *sont harmoniquement associées aux deux autres* MC, MD.

Trouver le lieu décrit par le pôle de la corde AB, *ou par celui de* CD.

Notes sur l'exercice 61 (*).

L'équation de l'ellipse Γ étant

$$(\Gamma) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

celle de la droite AB est

$$b^2\alpha x - a^2\beta y - a^2b^2 = 0,$$

en désignant par α et β les coordonnées du point M.

La droite CD étant une des droites d'intersection du cercle MAB avec l'ellipse, doit avoir son coefficient angulaire égal et de signe contraire à celui de l'autre droite d'intersection AB. Son équation est donc de la forme

$$b^2\alpha x - a^2\beta y + p = 0,$$

L'équation générale des coniques circonscrites au triangle MAB est, par conséquent,

$$(1) \quad \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + (b^2\alpha x - a^2\beta y + \mu)(b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2) = 0;$$

ou en développant,

$$b^2(\lambda + b^2\alpha^2)x^2 + a^2(\lambda - a^2\beta^2)y^2 + b^2(\mu - a^2b^2)\alpha x + a^2(\mu + a^2b^2)\beta y - (\lambda + \mu)a^2b^2 = 0.$$

Exprimant que la conique (1) est un cercle, on a

(*) Ces notes sont de M. E. N. Barisien.

$$b^2\lambda + b^4\alpha^2 = \alpha^2\lambda - a^4\beta^2;$$

D'où

(2) $$\lambda = \frac{a^4\beta^2 + b^4\alpha^2}{c^2},$$

Il reste à exprimer que la conique (1) passe par le point M. Comme la quantité $b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2$ est différente de zéro, on trouve

$$\lambda + b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 + \mu = 0,$$

et, par conséquent,

(3) $$\mu = -\frac{a^2b^2}{c^2}(\alpha^2 + \beta^2).$$

L'équation du cercle Δ est, par suite,

$$(\Delta)\left\{\begin{array}{l}(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)(x^2+y^2)-b^2\alpha(\alpha^2+\beta^2+c^2)x-a^2\beta(\alpha^2+\beta^2-c^2)y \\ \qquad + c^2(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2) = 0.\end{array}\right.$$

a) 1° Si la circonférence Δ passe par le centre de Γ, on doit avoir

(4) $$b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 = 0.$$

Le lieu de M se compose des deux diagonales du rectangle des axes de Γ (*).

2° Si le centre de Δ est sur le grand axe de Γ, on a

(5) $$\alpha^2 + \beta^2 = c^2.$$

Le lieu de M est alors le cercle décrit sur la distance des deux foyers comme diamètre.

b) Soit R la longueur constante OM, on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2$$

La droite CD a pour équation

$$b^2\alpha x - a^2\beta y = \frac{R^2a^2b^2}{c^2}.$$

On peut poser

$$\alpha = k\cos\varphi, \qquad \beta = k\sin\varphi.$$

Cette équation devient

$$b^2x\cos\varphi - a^2y\sin\varphi = \frac{Ra^2b^2}{c^2}.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que la droite

(*) Ce résultat démontre le théorème suivant : *Si, d'un point* M, *pris sur l'une des diagonales du rectangle des axes, on mène les tangentes* MA.MB *à* Γ *le quadrilatère* MOAB *est inscriptible.* On peut établir cette propriété par la géométrie élémentaire. (V. *Journal de Mathématiques Élémentaires*, n° de janvier 1893.) G. L.

correspondante enveloppe l'ellipse représentée par l'équation

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{R^2}{c^4}.$$

c). Les deux droites AB, CD, et la droite δ considérée dans l'énoncé, ont pour équations, respectivement

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1,$$

$$\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{c^2},$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

L'élimination de x et y entre ces trois équations donne

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{a^2} & \frac{\beta}{b^2} & 1 \\ \frac{\alpha}{a^2} & \frac{\beta}{b^2} & \frac{\alpha^2 + \beta^2}{c^2} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

ou en développant

$$\frac{(a\beta - b\alpha)(\alpha^2 + \beta^2)}{c^2} + b\alpha + a\beta - 2\alpha\beta = 0.$$

Le lieu de M est donc la cubique dont l'équation est

$$(8) \quad (ay - bx)(x^2 + y^2) - 2c^2xy + c^2(bx + ay) = 0.$$

Elle passe par le centre et les foyers de Γ, par le point $(x = a, y = b)$. Son asymptote réelle a pour équation

$$ay - bx = \frac{2abc^2}{a^2 + b^2}.$$

Cette droite est parallèle à la première diagonale du rectangle des axes et, comme on le vérifie facilement, elle passe par le point symétrique de l'origine par rapport á δ.

Enfin, si l'on cherche le point d'intersection de la courbe, avec son asymptote, on trouve que les coordonnées de ce point vérifient l'équation

$$4abc^2(ax - by) = (ay + bx)(a^2 + b^2)^2.$$

QUESTION 323

Le centre d'un cercle bi-tangent à une conique, la projection d'un point quelconque de la conique sur la corde des contacts et l'intersection de la normale en ce point avec l'axe qui ne contient pas le centre du cercle, sont en ligne droite. (A. Tissot.)

1re solution (par M. E.-N. Barisien).

Prenons pour axe des y, la corde des contacts et pour axe des x la perpendiculaire à la corde des contacts, passant par le centre du cercle. Soient R le rayon du cercle et a la distance de son centre à la corde des contacts. L'équation du cercle est

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0. \quad (1)$$

Celle d'une conique bi-tangente au cercle, ayant pour corde des contacts l'axe des y, est

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 + \lambda x^2 = 0. \quad (2)$$

La normale en un point (x, y) de cette conique a pour équation

$$\frac{X - x}{x(1 + \lambda) - a} = \frac{Y - y}{y}. \quad (3)$$

L'abscisse du centre de la conique étant $\frac{a}{1 + \lambda}$, l'équation de l'axe qui ne contient pas le centre du cercle est

$$X = \frac{a}{1 + \lambda}.$$

En portant cette valeur dans (3), on a, pour l'ordonnée du point d'intersection de cet axe avec la normale,

$$Y = \frac{\lambda y}{1 + \lambda}.$$

L'équation de la droite joignant ce point à la projection du point de la conique sur la corde des contacts est, par suite,

$$y - Y = (H - X)\left(\frac{Y - y}{x}\right),$$

ou

$$y(1 + \lambda) - \lambda y = - \frac{y}{a}\left[H(1 + \lambda) - a\right].$$

Or, en faisant dans cette équation $y = 0$, on trouve

$$H = a.$$

La droite joignant le point (x, y) ou point de rencontre de la normale avec l'axe qui ne contient pas le centre du cercle passe donc bien par le centre du cercle.

Il est, de plus, remarquable que, pour toutes les coniques telles que (2) qui sont bi-tangentes à un cercle donné sur la même corde des contacts, la droite joignant la projection d'un point quelconque de la conique sur la corde des contacts au point d'intersection de la normale avec l'axe qui ne contient pas le centre du cercle passe toujours par le centre du cercle.

Cette droite passe donc par un point fixe, quelle que soit la conique bi-tangente et quel que soit le point situé sur la conique.

On peut aussi observer que si la corde des contacts est une directrice de la conique, le cercle devient le foyer correspondant. Et la proposition énoncée donne lieu au cas particulier suivant :

Le point où la normale en un point quelconque M *d'une conique rencontre l'axe non focal appartient à la droite qui joint un foyer de la conique à la projection du point* M *sur la directrice correspondant à ce foyer.*

Cette question a été proposée sous le n° 1612, par M. E. Rouché dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (année 1891, p. 25, numéro de juillet).

2e solution (par M. Brocard) :

Soient Λ la conique donnée, rapportée à un sommet et à l'axe focal; $(\alpha, \beta)(\xi, \eta)$ les coordonnées de B, M; BC, MN, les normales en ces points. On aura

$$(\Lambda) \qquad y^2 = 2px + qx^2;$$

$$(\mathrm{MN}) \qquad \mathrm{Y} - \eta = -\frac{\eta}{p+q\xi}(\mathrm{X} - \xi);$$

$$(\mathrm{AC}) \qquad \mathrm{Y} - \eta = -\frac{\eta}{p+q\alpha}(\mathrm{X} - \alpha);$$

donc, le point I d'intersection de MN et de AC a pour abscisse

$$\mathrm{X} = -\frac{p}{q},$$

qui représente le second axe de la conique, puisque cette

valeur correspond à

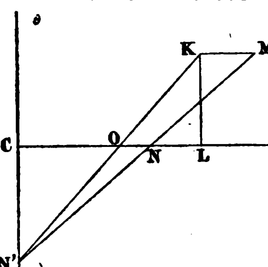
$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Dans le cas de la parabole, $q = 0$; le point I est alors rejeté à l'infini; en d'autres termes, les droites AC, MN sont parallèles, ce qui revient à observer que le segment CE, projection de AC, est égal à la sous-normale KN ou au périmètre de la parabole.

3e solution (par Mme Ve F. Prime) :

Soient :

C le centre et M un point de la conique;
O le centre d'un cercle bi-tangent;
L le pied de la corde des contacts sur l'axe CO;
K la projection du point M sur la corde des contacts;
N et N′ les intersections de la normale en M avec les axes de la conique.



Nous désignerons par a et b les longueurs des demi-axes de la conique a, se rapportant à l'axe dirigé suivant CO; suivant l'usage, $2.c$ sera la distance focale.

La question revient à démontrer l'exactitude de la proportion

$$CO : OL = CN' : KL.$$

Or, on sait que $$\frac{CO}{c^2} = \frac{CL}{a^2} = \frac{OL}{b^2};$$

et la relation connue $$\frac{MN'}{a^2} = \frac{MN}{b^2},$$

donne $$\frac{CN' + KL}{a^2} = \frac{KL}{b^2} = \frac{CN'}{c^2}.$$

On a donc $$\frac{CO}{OL} = \frac{CN'}{KL} = \frac{c^2}{b^2}.$$

C. Q. F. D.

QUESTION 326

Solution par M. Henri, élève au Lycée Louis-le-Grand.

Etant donnée une ellipse de foyers F *et* F′, *trouver le lieu décrit par un point* P *tel qu'en menant, de ce point, les tangentes à l'ellipse ayant leurs points de contact en* M, M′, *les droites* MF *et* M′F′ *se coupent sur l'ellipse. Montrer que ce lieu se compose des deux directrices de l'ellipse donnée et d'une ellipse.*

Le lieu du point de rencontre des droites M′F *et* MF′ *est aussi une ellipse.* (Barisien).

Je m'appuierai sur le théorème suivant :

« *Si autour de deux points fixes* F *et* F′ *on fait tourner deux droites qui se coupent sur une conique et rencontrent la courbe en deux autres points* M, M′, *ces deux points forment deux divisions homographiques dont les points doubles sont les deux points* A, A′ *de la courbe situés sur la droite* FF′, » (Voir Chasles, *Sections coniques*.)

Il s'agit de chercher le lieu des points d'intersection des tangentes en deux points homologues M, M′. Transformons la figure homographiquement, de façon que les points A, A′ deviennent les points cycliques, la conique se transforme en un cercle; les deux divisions homographiques deviennent deux divisions semblables, c'est-à-dire qu'elles peuvent être considérées comme déterminées par l'intersection du cercle avec les côtés d'un angle constant tournant autour du centre. Donc le lieu du point d'intersection des tangentes en deux points homologues est un cercle concentrique au précédent. En revenant à la figure primitive, on voit que P décrit une conique tangente à la première aux points A et A′. Mais l'énoncé comprend aussi le cas où la droite MM′ passe par F ou F′; par conséquent, le lieu de P se compose des deux polaires de F et de F′ et de la conique précédente.

Dans le cas où F et F′ sont les foyers de l'ellipse, le lieu de P se compose des deux directrices et d'une ellipse ayant les

mêmes axes que l'ellipse donnée, et tangente à celle-ci aux sommets A, A'. Les droites F'M, FM' sont deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques, puisque les points M, M' appartiennent à deux divisions homographiques sur la conique; par conséquent le lieu de leur point d'intersection est une conique passant par F, F'.

Nota. — M. Vazou, professeur au Collège de Falaise, nous a envoyé une solution analytique de cette question. Nous avons aussi reçu une solution anonyme.

QUESTIONS PROPOSÉES

361. — Démontrer que l'équation

$$(x^2 + y^2)(x + a) = \frac{a^2}{2} y,$$

représente une strophoïde oblique.

G. L.

ERRATA

Page 241.

ligne 2, *au lieu de* $l_1 z$, *lire* $l_1 x$.

ligne 2, en remontant, *au lieu de* $\frac{\delta\delta_1'}{\delta_1\delta}$, *lire* $\frac{\delta\delta_1'}{\delta_1\delta'}$.

Page 242.

ligne 3, et ligne 6 en remontant, *au lieu de* $\delta\delta_1$, *lire* $\delta\delta_1'$.

Page 243.

ligne 4 en remontant, *au lieu de* $\frac{\delta}{\delta'}$, *lire* $\frac{\delta}{\delta_1}$.

Page 244.

ligne 9, *au lieu de* $\frac{\delta_1}{\delta_1}$, *lire* $\frac{\delta}{\delta_1'}$.

ligne 10, *au lieu de* $\delta\delta_1$, *lire* $\delta\delta_1'$.

ligne 3, en remontant, *au lieu* du second L_1, *lire* L.

Page 246.

ligne 4, *au lieu de* Si V_a', V_b', V_c' sont les angles que... *lire :* REMARQUE. Si v_a', v_b', v_c' sont les angles définis à $2k\pi$ près, que...

lignes 6 et 7, *lire* aussi v_a', v_b', v_c' au lieu de V_a', V_b', V.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25386-11-92.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Concours.

Questions d'examens.

Bibliographie et Correspondance.

Exercices écrits.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25386-11-92.